ISSN 2075-9827

КМП

Карпатські математичні публікації

CARPATHIAN MATHEMATICAL PUBLICATIONS

КАРПАТСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ

Том 5

№ 1

2013

Карпатські математичні публікації

Науковий журнал

Друкується за рішенням Вченої ради
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Адреса редакції: Факультет математики та інформатики
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57

Тел.: (0342) 59-60-50

e-mail: cmp.if.ua@gmail.com

Адреса в інтернеті: http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp/

Карпатські математичні публікації

НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ
Т.5, №1
2013

Зміст

Carpathian mathematical publications

Scientific journal
V.5, №1
2013

Contents

Карпатские математические публикации

Научный журнал
Т.5, №1
2013

Содержание

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.524

Баран О.Є.

Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

Баран О.Є. *Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 4–13.

Для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду встановлено деякі кругові та параболічні області збіжності.

Ключові слова і фрази: гіллястий ланцюговий дріб, область збіжності.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів, Україна
E-mail: boe13@ukr.net

Вступ

Багато критеріїв збіжності неперервних дробів носять характер областей збіжності, тобто вказуються такі області у комплексній площині, що якщо елементи a_k, b_k належать цим областям, то неперервний дріб $\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \frac{a_k}{b_k}$ збігається. Області збіжності для неперервних дробів вперше зустрічаються у роботах Ворпіцького (1865), Прінгсгейма (1899) і Ван Флека (1901) [9]. Особливе місце займають параболічні та спарені області збіжності. Перша параболічна область з віссю параболи вздовж дійсної осі була досліджена Скоттом і Уоллом (1940) [15]. Огляд узагальнень параболічної теореми поданий у монографії Джоунса і Трона [9]. Важливим застосуванням цих результатів для функціональних неперервних дробів є кардіоїдні області збіжності.

Спареними областями збіжності називаються такі пари областей $\langle E_1, E_2\rangle$ комплексної площини, що умови $a_{2k-1} \in E_1$ і $a_{2k} \in E_2$, $k \geq 1$, гарантують збіжність дробу $\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \frac{a_k}{1}$. Перші спарені області збіжності отримали Лейтон і Уолл (1936) [12]. Продовжили ці дослідження Ланге [11], Трон [7, 16], Лорентцен [13] та інші.

Гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) є багатовимірними узагальненнями неперервних дробів. Різні типи областей збіжності для різних конструкцій ГЛД досліджували у своїх роботах Д. Боднар [5, 6], Х. Кучмінська [10], Т. Антонова [1, 2], В. Гладун [1], Р. Дмитришин [8], О. Сусь [2], Н. Гоєнко [6], О. Манзій [14] та інші.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 11A55, 11J70, 11K50, 30B70, 40A15.

Найпростішими за структурою, аналогічні структурі кратних степеневих рядів, є гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними

$$a_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1} = a_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)} z_{i_2}}{1+_{\ddots}}}, \tag{1}$$

де $i(k) \in I$, $I = \{i(k) : \ i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k,\ 1 \leq i_p \leq i_{p-1},\ p = \overline{1,k},\ k \geq 1,\ i_0 = N\}$, N — максимальна кількість гілок розгалужень, $a_{i(k)}$ — комплексні числа, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$ — комплексні змінні. Скінченний дріб

$$f_n = a_0 + \overset{n}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}$$

називається n-тим підхідним дробом ГЛД (1).

У даній статті для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними встановлено деякі області збіжності.

1 Деякі кругові області збіжності

Розглянемо функціональний ГЛД з нерівнозначними змінними вигляду

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c^2_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{2}$$

де $i(k) \in I$, $c_{i(k)}$ — комплексні числа, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$ — комплексні змінні.

Задамо відображення $l : I \to \mathbb{N}$ за таким правилом

$$l = l(i(k)) = \sum_{s=1}^{k} \delta_{i_k}^{i_s}, \tag{3}$$

де $\delta_{i_k}^{i_s}$ — символ Кронекера. Залежно від значення величини l, розіб'ємо множину I на три підмножини $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, які попарно не перетинаються:

$$I_1 = \{i(k) : \ i(k) \in I,\ l = 1,\ k \geq 1\}, \quad I_2 = \{i(k) : \ i(k) \in I,\ l - \text{парне},\ k \geq 2\},$$

$$I_3 = \{i(k) : \ i(k) \in I,\ l - \text{непарне},\ l > 1,\ k \geq 3\}.$$

Теорема 1. *Нехай для дробу (2) виконуються умови:*
a) $N > 1$ і елементи $c_{i(k)}$ належать областям

$$|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{1,i_k}| \leq \rho_{1,i_k}, \quad (\rho_{1,i_k} + |\Gamma_{1,i_k}|)^2 \leq \frac{r_1/\beta}{i_{k-1} - 1}, \quad \text{якщо} \quad i(k) \in I_1, \tag{4}$$

$$|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{3,i_k}| \leq \rho_{3,i_k}, \quad (\rho_{3,i_k} + |\Gamma_{3,i_k}|)^2 \leq r/\beta, \quad \text{якщо} \quad i(k) \in I_3, \tag{5}$$

$$|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{2,i_k}| \geq \rho_{2,i_k}, \quad (\rho_{2,i_k} - |\Gamma_{2,i_k}|)^2 \geq (2 + r_1)(1 + r_1 + r)/\alpha, \quad \text{якщо} \quad i(k) \in I_2, \tag{6}$$

або

б) $N = 1$ і елементи $c_{i(k)}$ належать областям (5), якщо $i(k) \in I_1 \cup I_3$, або (6), якщо $i(k) \in I_2$, де $r_1 = 0$ при $N = 1$ і $0 < r_1 < (1-3r)/(1+r)$ при $N > 1$, $0 < r < 1/3$, $\Gamma_{j,s} \in \mathbb{C}$, $\rho_{j,s} > 0$, $j = \overline{1,3}$, $s = \overline{1,N}$, $0 < \alpha \le \beta$.

Тоді ГЛД (2) рівномірно збігається в замкненій області

$$D = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \alpha \le |z_s| \le \beta,\ s = \overline{1,N} \right\}$$

до деякої голоморфної функції $f(\mathbf{z})$ і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f(\mathbf{z}) - f_m(\mathbf{z})| \le M C_{N+m}^{N-1} q^{m+1},$$

де $f_m(\mathbf{z})$ — m-тий підхідний дріб (2), $M = 1 - r$ при $N = 1$ і $M = \max\limits_{1 \le p \le N} (r_1/r)^p$ при $N > 1$, $q = \sqrt{(2+r_1)r/(1-r_1-r)}$.

Доведення. а) Очевидними є наступні оцінки:

$$|c_{i(k)}^2| \le (\rho_{j,i_k} + |\Gamma_{j,i_k}|)^2, \quad i(k) \in I_1 \cup I_3; \quad |c_{i(k)}^2| \ge (\rho_{2,i_k} - |\Gamma_{2,i_k}|)^2, \quad i(k) \in I_2.$$

Враховуючи умови (4)–(6), маємо

$$|c_{i(k)}^2| \le \frac{r_1/\beta}{i_{k-1} - 1}, \quad \text{якщо} \quad i(k) \in I_1, \quad |c_{i(k)}^2| \le r/\beta, \quad \text{якщо} \quad i(k) \in I_3,$$

$$|c_{i(k)}^2| \ge (2 + r_1)(1 + r_1 + r)/\alpha, \quad \text{якщо} \quad i(k) \in I_2.$$

Отже, для дробу (2) виконуються умови теореми, яка є багатовимірним аналогом теореми Лейтона-Уолла для ГЛД з нерівнозначними змінними [4]. Тому ГЛД (2) збігається і справджуються відповідні оцінки швидкості збіжності.

б) Позначимо $c_{\underbrace{11\ldots1}_{k}} = c_k$. Тоді дріб (2) матиме вигляд

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2 z_1}{1}. \tag{7}$$

Враховуючи умови (4)–(6), маємо: $|c_{2k-1}^2| \le r/\beta$, $|c_{2k}^2| \ge 2(1+r)/\alpha$, $k \ge 1$. Позначимо залишки дробу (7): $Q_n^{(n)} = 1$, $Q_k^{(n)} = 1 + c_{k+1}^2 z_1 / Q_{k+1}^{(n)}$, $k = \overline{1, n-1}$, $n \ge 1$.

При довільному n, $n \ge 1$, індукцією по k можна довести справедливість наступних нерівностей

$$|Q_{2k-1}^{(n)}| \ge 1, \quad 1 \le k \le [(n+1)/2], \quad 1 - r \le |Q_{2k}^{(n)}| \le 1 + r, \quad 1 \le k \le [n/2],$$

з яких при довільному n, $n \ge 1$, і довільному k, $1 \le k \le [(n+1)/2]$, отримуємо

$$\frac{|c_{2k}^2 z_1|}{|Q_{2k-1}^{(n)}||Q_{2k}^{(n)}|} = \frac{|c_{2k}^2 z_1|}{\left|\left(1 + \dfrac{c_{2k}^2 z_1}{Q_{2k}^{(n)}}\right) Q_{2k}^{(n)}\right|} = \frac{1}{\left|\dfrac{Q_{2k}^{(n)}}{c_{2k}^2 z_1} + 1\right|} \le \frac{1}{1 - \dfrac{|Q_{2k}^{(n)}|}{|c_{2k}^2 z_1|}} \le 2.$$

Із формули різниці підхідних дробів ГЛД [5] для неперервного дробу (7) маємо

$$|f_n(z_1) - f_m(z_1)| = \frac{\prod\limits_{k=1}^{m+1} |c_k^2 z_1|}{\prod\limits_{k=1}^{m+1} |Q_k^{(n)}| \prod\limits_{k=1}^{m} |Q_k^{(m)}|}, \quad n > m \ge 1.$$

Використовуючи наведені вище оцінки, при $m = 2s - 1$ отримаємо $|f_n(z_1) - f_{2s-1}(z_1)| \le (1-r)q^{2s}$, а при $m = 2s$ — $|f_n(z_1) - f_{2s}(z_1)| \le 2^{-1/2} r^{1/2} (1-r)^{3/2} q^{2s+1}$, $s \ge 1$. Отже,

$$|f_n(z_1) - f_m(z_1)| \le M q^{m+1}, \tag{8}$$

де $M = 1 - r$, $q = \sqrt{2r/(1-r)}$. □

Якщо у теоремі 1 у випадку $N = 1$ покласти $\alpha = \beta = 1$, $z_1 = 1$, то шляхом підбору параметрів $\Gamma_j = \Gamma_{j,1}$, $j = 1, 2$, отримаємо деякі окремі випадки відомих ознак збіжності неперервного дробу

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{1}. \tag{9}$$

Наслідок 1.1. *Нехай елементи c_k неперервного дробу (9) є комплексними числами, які задовольняють хоча б одну із умов:*

а) $|c_{2k-1}| \le \sqrt{r}$, $|c_{2k}| \ge \sqrt{2(1+r)}$;

б) $|c_{2k-1}| \le \sqrt{r}$, $|c_{2k} \pm i| \ge \sqrt{2(1+r)} + 1$;

в) $|c_{2k-1} \pm ia| \le \rho_1$, $(\rho_1 + |a|)^2 \le r$, $|c_{2k} \pm i(a+1)| \ge \rho_2$, $(\rho_2 - |a+1|)^2 \ge 2(1+r)$;

де $k \ge 1$, $0 < r < 1/3$, $a \in \mathbb{C}$, $\rho_j > 0$, $j = 1, 2$.

Тоді дріб (9) збігається і справджується оцінка швидкості збіжності (8).

Умови а) у наслідку 1.1 є аналогом теореми Лейтона-Уолла для неперервного дробу вигляду (9). Дані умови дають ширші області збіжності, ніж теорема Лейтона-Уолла [12]. Умови б)–в) є окремими випадками відповідно теорем Трона і Ланге для спарених кругових областей збіжності неперервних дробів [9, 11]. Ці умови визначають вужчі області збіжності, ніж у теоремах Трона та Ланге, проте маємо оцінки швидкості збіжності. Зауважимо, що у формулюваннях теорем Лейтона-Уолла, Трона та Ланге оцінок швидкості збіжності не наведено.

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{10}$$

де $i(k) \in I$, $a_{i(k)}$ — комплексні числа.

Залежно від значення величини l, яка визначається формулою (3), а також значення останнього індексу i_k в мультиіндексі $i(k)$, розіб'ємо множину всіх мультиіндексів I на підмножини, які попарно не перетинаються:

$$I_1^p = \{i(k) : i(k) \in I,\ i_k = p,\ l = 1,\ k \ge 1\},$$

$$I_2^p = \{i(k) : i(k) \in I,\ i_k = p,\ l - \text{парне},\ k \ge 2\},$$

$$I_3^p = \{i(k) : i(k) \in I,\ i_k = p,\ l - \text{непарне},\ l > 1,\ k \ge 3\}, \quad p = \overline{1,N}.$$

Лема 1.1. *Нехай $N>1$ і ρ_1, ρ — довільні дійсні числа такі, що $\rho_1>1$, $\rho>1$,*

$$V_1^{i_k} := \left\{ w\in\mathbb{C}:\ |w| \le \frac{\rho_1}{i_{k-1}-1} \right\}, \tag{11}$$

$$V_3^{i_k} := \{ w\in\mathbb{C}:\ |w|\le\rho \}, \tag{12}$$

$$V_2^{i_k} := \{ w\in\mathbb{C}:\ |w+1|\ge 1+\rho_1 \}, \tag{13}$$

$$E_1^{i_k} := \left\{ w\in\mathbb{C}:\ |w| \le \frac{\rho_1}{i_{k-1}-1} \right\}, \tag{14}$$

$$E_3^{i_k} := \{ w\in\mathbb{C}:\ |w|\le\rho \}, \tag{15}$$

$$E_2^{i_k} := \left\{ w\in\mathbb{C}:\ w=re^{i\theta},\ r\ge(2+\rho_1)(\rho_1+\rho-\cos\theta),\ 0\le\theta\le 2\pi \right\}, \tag{16}$$

де $i(k)\in I$.

Тоді виконуються співвідношення

$$E_j^{i_k} = \left\{ w\in\mathbb{C}:\ \frac{w}{1+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} V_1^{i_{k+1}} + V_{3-j \bmod 2}^{i_k}} \subseteq V_j^{i_k} \right\}, \tag{17}$$

де $i(k)\in I$; $j=1$, якщо $l=1$; $j=2$, якщо l — парне; $j=3$, якщо l — непарне і $l>1$, l визначається згідно (3).

Доведення. Нехай $i(k)\in I$ — довільний мультиіндекс,

$$G_{3-j \bmod 2}^{i_k} := \left(1+\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} V_1^{i_{k+1}} + V_{3-j \bmod 2}^{i_k}\right), \quad j=\overline{1,3}.$$

Із співвідношення (17) маємо, що

$$E_j^{i_k} \subseteq V_j^{i_k} G_{3-j \bmod 2}^{i_k} \quad \text{і} \quad E_j^{i_k} = \bigcap_{g_{3-j \bmod 2}\in G_{3-j \bmod 2}^{i_k}} V_j^{i_k} g_{3-j \bmod 2}, \quad j=\overline{1,3}.$$

Покажемо, що при заданих множинах значень (11)–(13) відповідні їм множини елементів дробу (10) мають вигляд (14)–(16).

Доведемо справедливість формул (14), (15). Очевидно, що

$$G_2^{i_k} = 1+\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} V_1^{i_{k+1}} + V_2^{i_k} = \{ w\in\mathbb{C}:\ |w|\ge 1 \}.$$

Нехай g_2, g_2' — такі дві точки множини $G_2^{i_k}$, що $\arg(g_2')=\arg(g_2)$, $|g_2'|<|g_2|$ і $g_2'\in\partial G_2^{i_k}$, де $\partial G_2^{i_k}$ — межа множини $G_2^{i_k}$. Звідси маємо, що $V_j^{i_k} g_2' \subset V_j^{i_k} g_2$, $j=1,3$, і тому $E_j^{i_k}$, $j=1,3$, мають вигляд (14), (15) відповідно.

Доведемо справедливість формули (16). Легко бачити, що

$$G_3^{i_k} = 1+\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k-1} V_1^{i_{k+1}} + V_3^{i_k} = \{ w\in\mathbb{C}:\ |w-1|\le\rho_1+\rho \}.$$

Нехай g_3, g_3' — такі дві точки множини $G_3^{i_k}$, що $g_3\ne 0$, $g_3'\ne 0$, $\arg(g_3')=\arg(g_3)$, $|g_3'|>|g_3|$ і $g_3'\in\partial G_3^{i_k}$. Звідси маємо, що $V_2^{i_k} g_3' \subset V_2^{i_k} g_3$. Тому

$$E_2^{i_k} = \bigcap_{g_3\in G_3^{i_k}} V_2^{i_k} g_3 = \bigcap_{g_3'\in\partial G_3^{i_k}} V_2^{i_k} g_3'.$$

Встановимо рівняння межі області (16). Нехай $\tau_2(\alpha)e^{i\alpha}$ і $\tau_3(\beta)e^{i\beta}$ — довільні точки на межах множин $V_2^{i_k}$ та $G_3^{i_k}$ відповідно. Маємо, що $\tau_2(\alpha)=-\cos\alpha+[(1+\rho_1)^2-\sin^2\alpha]^{1/2}$, $0\le\alpha\le 2\pi$, $\tau_3(\beta)=\cos\beta+[(\rho_1+\rho)^2-\sin^2\beta]^{1/2}$, $0\le\beta\le 2\pi$. Можна показати, що для довільних α і β, $0\le\alpha\le 2\pi$, $0\le\beta\le 2\pi$, виконується нерівність

$$\tau_2(\alpha)\tau_3(\beta)\le(2+\rho_1)(\rho_1+\rho-\cos(\alpha+\beta)). \tag{18}$$

Для кожного кута $\theta=\alpha+\beta$ єдиним чином можна вибрати такі кути α і β, що в (18) буде виконуватися рівність. Звідси випливає, що множина $E_2^{i_k}$ визначається співвідношенням (16). □

Теорема 2. *Нехай $N>1$ і ρ_1, ρ, ε_1, ε_2, ε_3 — довільні дійсні числа такі, що $\rho_1>1$, $\rho>1$, $0<\varepsilon_1<\rho_1$, $0<\varepsilon_3<\rho$, $0<\varepsilon_2<\rho_1+\rho$. ГЛД (10) збігається, якщо елементи дробу $a_{i(k)}=r_{i(k)}e^{i\theta_{i(k)}}$ — комплексні числа, які задовольняють умови*

$$r_{i(k)}\le\frac{\rho_1-\varepsilon_1}{i_{k-1}-1}, \quad i(k)\in I_1^{i_k}, \tag{19}$$

$$r_{i(k)}\le\rho-\varepsilon_3, \quad i(k)\in I_3^{i_k}, \tag{20}$$

$$r_{i(k)}\ge(2+\rho_1)(\rho_1+\rho+\varepsilon_2-\cos\theta_{i(k)}), \quad i(k)\in I_2^{i_k}, \quad 0\le\theta_{i(k)}\le 2\pi. \tag{21}$$

Доведення. Розглянемо ГЛД вигляду

$$1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i(k)}(z)}{1}, \tag{22}$$

де $c_{i(k)}(z)=a_{i(k)}z$, якщо $i(k)\in I_1^{i_k}\cup I_3^{i_k}$, $c_{i(k)}(z)=a_{i(k)}/z$, якщо $i(k)\in I_2^{i_k}$, $z=re^{i\theta}$ — комплексна змінна. При $z=1$ дріб (22) зводиться до дробу (10).

З умови (19) при $|z|\le 1+\mu_1$, де $\mu_1=\dfrac{\varepsilon_1}{\rho_1-\varepsilon_1}$, маємо, що $|c_{i(k)}(z)|=|a_{i(k)}z|\le\dfrac{\rho_1}{i_{k-1}-1}$ для всіх $i(k)\in I_1^{i_k}$. Аналогічно, з умови (20) при $|z|\le 1+\mu_3$, де $\mu_3=\dfrac{\varepsilon_3}{\rho-\varepsilon_3}$, маємо, що $|c_{i(k)}(z)|=|a_{i(k)}z|\le\rho$ для всіх $i(k)\in I_3^{i_k}$.

Нехай $i(k)\in I_2^{i_k}$. Виберемо такі достатньо малі додатні числа η і μ_2, щоб при $|\theta|\le\eta$ і $r\le 1+\mu_2$ виконувались нерівності $R_{i(k)}\ge(2+\rho_1)(\rho_1+\rho-\cos\varphi_{i(k)})$ для всіх $i(k)\in I_2^{i_k}$, де $R_{i(k)}=|c_{i(k)}(z)|$, $\varphi_{i(k)}=\arg c_{i(k)}(z)$.

Нехай $\mu=\min(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$. Тоді в області $D:=\{z\in\mathbb{C}:\ |\theta|<\eta,\ 0<|z|<1+\mu\}$ для дробу (22) виконуються умови леми 1.1, а тому всі підхідні дроби, які є раціональними функціями, є рівномірно обмеженими і належать області

$$1+\sum_{i_1=1}^{N} V_1^{i_1} = \left\{ w\in\mathbb{C}:\ |w-1|\le\frac{N\rho_1}{N-1} \right\}.$$

За теоремою Монтеля послідовність підхідних дробів ГЛД (22) утворює нормальне сімейство голоморфних функцій в області D.

Нехай
$$h = \min\left\{\frac{r_1}{\rho_1 - \varepsilon_1}, \frac{r}{\rho - \varepsilon_3}, \frac{(2+\rho_1)(\rho_1+\rho+\varepsilon_2-1)}{(2+r_1)(1+r_1+r)}\right\},$$
де $0 < r_1 < (1-3r)/(1+r)$, $0 < r < 1/3$. Тоді для $|z| \le h$ елементи дробу (22) задовольняють умови багатовимірного аналогу ознаки збіжності Лейтона-Уолла [4]:
$$|c_{i(k)}(z)| = |a_{i(k)}z| \le \frac{r_1}{i_{k-1}-1}, \quad i(k) \in I_1^{i_k}, \quad |c_{i(k)}(z)| = |a_{i(k)}z| \le r, \quad i(k) \in I_3^{i_k},$$
$$|c_{i(k)}(z)| = \left|\frac{a_{i(k)}}{z}\right| \ge (2+r_1)(1+r_1+r), \quad i(k) \in I_2^{i_k}.$$

Отже, ГЛД (22) збігається в області, яка є перетином областей $|z| \le h$ і D. Тоді за теоремою Стілтьєса-Віталі дріб (22) збігається рівномірно на кожному компакті області D, зокрема в точці $z = 1$. □

У випадку $N = 1$, покладаючи $\rho_1 = 0$ і накладаючи на елементи дробу (22) умови (20) для $i(k) \in I_1^{i_k} \cup I_3^{i_k}$ та (21) для $i(k) \in I_2^{i_k}$, отримаємо відому теорему Трона [7].

Наслідок 1.2. *Нехай $N > 1$ і $\rho_1, \rho, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — довільні дійсні числа такі, що $\rho_1 > 1$, $\rho > 1$, $0 < \varepsilon_1 < \rho_1$, $0 < \varepsilon_3 < \rho$, $0 < \varepsilon_2 < \rho_1 + \rho$. ГЛД (10) збігається, якщо елементи дробу $a_{i(k)} = r_{i(k)}e^{i\theta_{i(k)}}$ — комплексні числа, які задовольняють умови*
$$r_{i(k)} \le \frac{\rho_1 - \varepsilon_1}{i_{k-1}-1}, \quad i(k) \in I_1^{i_k}, \quad r_{i(k)} \le \rho - \varepsilon_3, \quad i(k) \in I_3^{i_k},$$
$$r_{i(k)} \ge (2+\rho_1)(\rho_1+\rho+\varepsilon_2+1), \quad i(k) \in I_2^{i_k}.$$

У наслідку 1.2 межа області (21), яка є кривою «равлик Паскаля», вироджується в коло.

2 Деякі параболічні області збіжності

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб вигляду
$$\left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{23}$$
де $i(k) \in I$, b_0, $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ — комплексні числа.

Лема 2.1. *Нехай елементи ГЛД (23) належать наступним множинам:*
$$a_{i(k)} \in P^{i_k}(b,\alpha) := \left\{w \in \mathbb{C}:\ |w| - \mathrm{Re}\left(we^{-2i\alpha}\right) \le \frac{b^2}{2i_{k-1}}\cos^2\alpha\right\}, \tag{24}$$
$$b_{i(k)} \in H(b,\alpha) := \left\{w \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\left(we^{-i\alpha}\right) \ge b\cos\alpha\right\}, \tag{25}$$
де $i(k) \in I$, $b > 0$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, $b_0 \in H(b,\alpha)$. Тоді множини значень дробу (23) мають вигляд
$$V^{i_k} = H^{i_k}\left(-\frac{b}{2},\alpha\right) := \left\{w \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\left(we^{-i\alpha}\right) \ge -\frac{b}{2i_{k-1}}\cos\alpha\right\}, \quad i(k) \in I.$$

Доведення. Необхідно показати, що
$$\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} V^{i_{k+1}}} \subseteq V^{i_k}, \quad i(k) \in I. \tag{26}$$

Нехай $i(k) \in I$ — довільний мультиіндекс. Оскільки
$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} V^{i_{k+1}} = H\left(-\frac{b}{2},\alpha\right), \quad (b_{i(k)} + v) \in H\left(\frac{b}{2},\alpha\right), \quad v \in \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} V^{i_{k+1}},$$
то
$$\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + v} \in \left\{w \in \mathbb{C}:\ \left|w - \frac{a_{i(k)}e^{-i\alpha}}{b\cos\alpha}\right| \le \frac{|a_{i(k)}|}{b\cos\alpha}\right\}. \tag{27}$$

Для того, щоб виконувались співвідношення (26) потрібно, щоб круг (27) лежав у півплощині V^{i_k}. Це матиме місце, якщо відстань від центра круга до межі ∂V^{i_k} півплощини V^{i_k} буде не менше, ніж радіус круга, тобто
$$\frac{b}{2i_{k-1}}\cos\alpha + \mathrm{Re}\left(\frac{a_{i(k)}e^{-i\alpha}}{b\cos\alpha}e^{-i\alpha}\right) \ge \frac{|a_{i(k)}|}{b\cos\alpha},$$
що забезпечується умовою (24). □

Зауважимо, що в лемі 2.1 і надалі в позначенні множин P^{i_k} і V^{i_k} індекс i_k означає, що множини залежать від мультиіндекса $i(k) \in I$.

Розглянемо функціональний ГЛД вигляду
$$\left(b_0 + z + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + z}\right)^{-1}, \tag{28}$$
де $i(k) \in I$, b_0, $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ — комплексні числа, z — комплексна змінна.

Теорема 3. *Нехай для елементів ГЛД (28) виконуються умови:*
$$a_{i(k)} \in P^{i_k}(a,\alpha), \quad |a_{i(k)}| < M, \quad b_{i(k)} \in H(b,\alpha),$$
$$z \in H_0(a-b,\alpha) := \left\{w \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\left(we^{-i\alpha}\right) > (a-b)\cos\alpha\right\},$$
де $i(k) \in I$, $a > 0$, $M > 0$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, $b \in \mathbb{R}$, $b_0 \in H(b,\alpha)$, множини $P^{i_k}(a,\alpha)$ і $H(b,\alpha)$ визначаються (24) і (25). Тоді дріб (28) рівномірно збігається до голоморфної функції комплексної змінної z на кожному компакті півплощини $H_0(a-b,\alpha)$.

Доведення. З умов теореми випливає, що $(b_{i(k)} + z) \in H_0(a,\alpha), k \ge 0$, $i(k) \in I$ при $k \ge 1$. Згідно з лемою 2.1 множинами значень дробу (28) є множини $V^{i_k} = H^{i_k}\left(-\frac{a}{2},\alpha\right)$, $i(k) \in I$, і тому
$$f_n = \left(b_0 + z + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + z}\right)^{-1} \in \left\{w \in \mathbb{C}:\ \left|w - \frac{e^{-i\alpha}}{a\cos\alpha}\right| \le \frac{1}{a\cos\alpha}\right\}.$$

Отже, підхідні дроби ГЛД (28), які є раціональними функціями, при $z \in H_0(a-b,\alpha)$ є рівномірно обмеженими. За теоремою Монтеля послідовність підхідних дробів утворює нормальне сімейство голоморфних функцій для $z \in H_0(a-b,\alpha)$.

Оскільки за умовою теореми $|a_{i(k)}| < M$, $i(k) \in I$, то існує таке число $M' > 0$, що для $|z| > M' + N$ і $z \in H_0(a-b,\alpha)$ виконуються нерівності $|b_{i(k)} + z| > |a_{i(k)}| + i_k, i(k) \in I$. Для цих значень z гіллястий ланцюговий дріб (28) абсолютно збігається за теоремою Слешинського-Прінгсгейма [3]. Тоді за теоремою Стілтьєса-Віталі маємо, що ГЛД (28) збігається рівномірно на кожному компакті півплощини $H_0(a-b,\alpha)$. □

Якщо покласти $a = b$ і $z = \varepsilon e^{i\alpha}$, то з теореми 3 випливає наслідок.

Наслідок 2.1. *ГЛД (23) збігається, якщо $a_{i(k)} \in P^{i_k}(a,\alpha)$, $b_{i(k)} \in H(a+\varepsilon,\alpha)$, $|a_{i(k)}| < M$, де $i(k) \in I$, $a > 0$, $M > 0$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, ε — довільне досить мале додатне число.*

Розглянемо ГЛД вигляду

$$\left(b_0 + z + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-c^2_{i(k)}}{b_{i(k)} + z}\right)^{-1}, \tag{29}$$

де $i(k) \in I$, b_0, $c_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ — комплексні числа, z — комплексна змінна. Якщо $a_{i(k)} \in P^{i_k}(a,0)$, $a > 0$, то $c_{i(k)} = \sqrt{a_{i(k)}}$ задовольняє співвідношення $|\operatorname{Im}(c_{i(k)})| \le \frac{a}{2\sqrt{i_{k-1}}}$, $i(k) \in I$.

Таким чином з теореми 3 випливає наслідок.

Наслідок 2.2. *Нехай елементи ГЛД (29) задовольняють умови $|\operatorname{Im}(c_{i(k)})| \le \frac{a}{2\sqrt{i_{k-1}}}$, $|c_{i(k)}| < M$, $\operatorname{Im}(b_{i(k)}) \ge b$, де $i(k) \in I$, $a > 0$, $M > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}(b_0) \ge b$. Тоді дріб (29) рівномірно збігається до голоморфної функції комплексної змінної z на кожному компакті півплощини $\operatorname{Im}(z) > a - b$.*

References

[1] Antonova T.N., Gladun V.R. *Some sufficient conditions of convergence and stability of branching continued fractions with alternating partial numerators.* Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya 2004, **47** (4), 27–35. (in Ukrainian)

[2] Antonova T.N., Sus' O.M. *Twin convergence sets for two-dimensional continued fractions with complex elements.* Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya 2007, **50** (3), 94–101. (in Ukrainian)

[3] Baran O.E. *Some convergence criteria for branched continued fractions with nonequivalent variables.* J. of Lviv Polytechnic State University. Appl. Math. 1998, **341**, 18–23. (in Ukrainian)

[4] Baran O.E. *The twin circular domains of convergence for branched continued fractions with nonequivalent variables.* Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya 2009, **52** (4), 73–80. (in Ukrainian)

[5] Bodnar D.I. Branching Continued Fractions. Naukova Dumka, Kyiv, 1986. (in Russian)

[6] Bodnar D.I., Hoenko N.P. *Approximation of the ratio of Lauricella functions by a branched continued fraction.* Mat. Stud. 2003, **20** (2), 210–214. (in Ukrainian)

[7] Cowling V., Leighton W., Thron W. *Twin convergence regions for continued fractions.* Bull. Amer. Math. Soc. 1944, **50**, 351–357.

[8] Dmytryshyn R. *The two-dimensional g-fraction with independent variables for double power series.* J. of Approximation Theory 2012, **164** (12), 1520–1539. doi: 10.1016/j.jat.2012.09.002

[9] Jones W.B., Thron W.J. Continued Fractions. Analytic Theory and Applications. Addison-Wesley, London, 1980.

[10] Kuchminska Kh.J. Two-dimensional continued fractions. Institute for Appl. Probl. of Mech. and Math., Lviv, 2010. (in Ukrainian)

[11] Lange L., Thron. W. *A two-parameter family of best twin convergence regions for continued fractions.* Math. Zeitschr. 1960, **73**, 295–311.

[12] Leighton W., Wall H. *On the transformation and convergence of continued fractions.* Amer. J. Math. 1936, **58**, 267–281.

[13] Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions. Vol. 1: Convergence Theory. Atlantis Studies in Mathematics for Engineering and Science, Atlantis Press, 2008.

[14] Manzij O.S. *On convergence of decomposition of ratio of hypergeometric Appell F_3 functions into a branching continued fraction in some unbounded domain.* Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya 1999, **42** (2), 7–11. (in Ukrainian)

[15] Scott W., Wall H. *A Convergence Theorem for Continued Fractions.* Trans. Amer. Math. Soc. 1940, **47**, 155–172.

[16] Thron. W. *Convergence regions for the general continued fraction.* Bull. Amer. Math. Soc. 1943, **49**, 913–916.

Надійшло 31.01.2013

Baran O.E. *Some convergence regions of branched continued fractions of special form.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 4–13.

Some circular and parabolic convergence regions for branched continued fractions of special form are established.

Key words and phrases: branched continued fraction, convergence region.

Баран О.Е. *Некоторые области сходимости ветвящихся цепных дробей специального вида* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 4–13.

Для ветвящихся цепных дробей специального вида установлены некоторые круговые и параболические области сходимости.

Ключевые слова и фразы: ветвящаяся цепная дробь, область сходимости.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 512.54

Бондаренко Є.В.

РІСТ СПРЯЖЕНОСТІ В ГІЛЛЯСТИХ ГРУПАХ

Бондаренко Є.В. *Ріст спряженості в гіллястих групах* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 14–18.

Доведено, що гіллясті групи автоморфізмів регулярного кореневого дерева не можуть мати поліноміальний ріст спряженості.

Ключові слова і фрази: гіллясти група, клас спряженості, функція росту.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: ibond.univ@gmail.com

Вступ

Нехай G — скінченно породжена група зі скінченною системою твірних S. Одним із центральних об'єктів дослідження в геометричній теорії груп є функція росту групи $\gamma_G(n)$, яка обчислює кількість елементів групи в кулі радіуса n з центром в одиниці в графі Келі групи $\Gamma(G,S)$. *Функція росту спряженості* $\gamma_G^c(n)$ групи G визначається як кількість класів спряженості, які перетинають кулю радіуса n в графі Келі. Функції росту спряженості розглядалися з 60-х років минулого століття для фундаментальних груп деяких класів многовидів. За останні кілька років було отримано ряд важливих загальних результатів про ріст спряженості. Зокрема, відомі результати про функції росту лінійних і розв'язних груп були перенесені на функції росту спряженості. Так в роботах [2, 9, 3] доведено, що скінченно породжені лінійні групи та скінченно породжені розв'язні групи, які не є віртуально нільпотентними, мають (рівномірно) експоненційний ріст спряженості.

В даній роботі ми розглядаємо ріст спряженості в гіллястих групах, які були визначені Р.І. Григорчуком в [6]. Цей клас груп є важливим з точки зору звичайного росту груп, оскільки в ньому були вперше знайдені групи проміжного росту [4], а також завдяки іншим цікавим властивостям (екстремальність, скінченна ширина, періодичність тощо, див. [5, 1, 6]). Зауважимо, що гіллясті групи не можуть мати поліноміальний ріст. Це одразу випливає з того, що кожна гіллясти група містить нетривіальний прямий добуток H^n для всіх $n \in \mathbb{N}$, а ріст підгрупи не може бути більшим за ріст групи. Цей аргумент не працює для росту спряженості: підгрупа може мати більший ріст спряженості за групу (наприклад, можна взяти підгрупи в нескінченній скінченно породженій групі з двома класами спряженості, див. [10]). В роботі ми доводимо, що гіллясті групи автоморфізмів регулярних кореневих дерев не можуть мати поліноміальний ріст спряженості, тобто

2010 *Mathematics Subject Classification:* 20F69, 20E45, 20E08.

функція $\gamma_G^c(n)$ не обмежена зверху поліномом від n. Звідси, зокрема, випливає, що гіллясті групи проміжного росту, наприклад такі, як група Григорчука або група ітерованих монодромій многочлена z^2+i, мають проміжний ріст спряженості. Зауважимо, що доведення цього факту для групи Григорчука було наведено в [8].

1 Гіллясті групи

Нехай X — скінченний алфавіт порядку $|X| \geq 2$. Множину всіх скінченних слів над X позначимо $X^* = \{x_1x_2\ldots x_n : x_i \in X, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$. Довжину слова $v \in X^*$ позначаємо $|v|$. Множину X^* будемо ототожнювати з множиною вершин регулярного кореневого дерева, в якому кожна вершина v з'єднана ребром з vx для всіх $x \in X$, а коренем є порожнє слово. Множина вершин X^n утворює n-тий рівень дерева X^*.

Нехай $G < \mathrm{Aut}\,X^*$ і v — вершина дерева X^*. *Стабілізатором вершини* v називається підгрупа $\mathrm{St}_G(v) = \{g \in G : g(v) = v\}$. *Стабілізатором n-го рівня* дерева називається підгрупа $\mathrm{St}_G(n) = \{g \in G : g(v) = v$ для всіх $v \in X^n\}$. Стабілізатор $\mathrm{St}_G(n)$ має скінченний індекс в групі G, який обмежений зверху індексом

$$[\mathrm{Aut}\,X^* : \mathrm{St}_{\mathrm{Aut}\,X^*}(n)] = |X|!^{1+|X|+\ldots+|X|^{n-1}} \leq C^{|X|^n}, \qquad (1)$$

де C — деяка константа, яка залежить тільки від $|X|$. *Жорстким стабілізатором вершини* v називається підгрупа $\mathrm{RiSt}_G(v) = \{g \in G : g(u) = u$ для всіх $u \in X^* \setminus vX^*\}$. *Жорстким стабілізатором n-го рівня* дерева називається підгрупа $\mathrm{RiSt}_G(n)$, породжена жорсткими стабілізаторами вершин n-го рівня. Оскільки жорсткі стабілізатори різних вершин одного рівня комутують між собою, то жорсткі стабілізатори рівнів розкладаються у прямий добуток

$$\mathrm{RiSt}_G(n) = \prod_{v\in X^n} \mathrm{RiSt}_G(v).$$

Група G називається *гіллястою*, якщо вона діє транзитивно на всіх рівнях дерева і кожен жорсткий стабілізатор рівня $\mathrm{RiSt}_G(n)$ має скінченний індекс в G.

Визначимо вкладення $\psi : \prod_{x\in X} \mathrm{Aut}\,X^* \to \mathrm{Aut}\,X^*$, яке переводить набір автоморфізмів $(g_x)_{x\in X}$ у автоморфізм, який стабілізує вершини з X і діє на піддереві xX^* так само, як g_x діє на X^*. Група G називається *регулярно гіллястою* над своєю підгрупою H, якщо G діє транзитивно на всіх рівнях дерева, підгрупа H має скінченний індекс в G і $\psi(\prod_{x\in X} H)$ є підгрупою скінченного індексу в H.

Кожен автоморфізм $g \in \mathrm{Aut}\,X^*$ індукує відображення $vX \to g(v)X$ для довільної вершини $v \in X^*$. Скорочуючи префікси v і $g(v)$, ми отримуємо підстановку на множині X, яка називається *вершинною підстановкою* автоморфізма g в вершині v. Кожен автоморфізм однозначно визначається набором вершинних підстановок у всіх вершинах дерева.

2 Результати

Функція росту спряженості групи залежить від вибору системи твірних. Для того, щоб позбутися цієї залежності вводять відношення еквівалентності на таких функціях. Для функцій $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кажуть, що $f \preccurlyeq g$, якщо існує така константа C, що $f(n) \leq Cg(Cn) + C$ для всіх n. Функції f і g називаються еквівалентними (мають однаковий ріст), якщо $f \preccurlyeq g$ і $g \preccurlyeq f$. Функції росту спряженості для різних скінченних систем твірних групи є еквівалентними. Кажуть, що група має поліноміальний ріст спряженості, якщо існує такий поліном $P(n)$, що $\gamma^c_G(n) \preccurlyeq P(n)$. Зауважимо, що якщо звичайна функція росту $\gamma_G(n)$ має поліноміальний ріст, то $\gamma_G(n) \sim n^m$ для деякого цілого $m \in \mathbb{N}$. Для функцій росту спряженості ця властивість не виконується, більш того, скінченно породжена група може мати довільну функцію спряженості з природніми обмеженнями (див. [10]).

Теорема 1. *Скінченно породжена гілляста група не може мати поліноміальний ріст спряженості.*

Доведення. Нехай G — скінченно породжена гілляста група автоморфізмів дерева X^*. Спочатку ми доведемо, що функція росту спряженості $\gamma^c_G(n)$ не обмежена зверху функцією n^α для деякого $\alpha > 0$. При побудові елементів з різних класів спряженості ми будемо використовувати наступне спостереження. Якщо автоморфізм g стабілізує n-тий рівень дерева і має l нетривіальних вершинних підстановок у вершинах n-го рівня, то і будь-який автоморфізм спряжений з g в усій групі автоморфізмів належить стабілізатору n-го рівня і має l нетривіальних вершинних підстановок у вершинах n-го рівня. Зокрема, автоморфізми зі стабілізатора $\mathrm{St}_G(n)$, які мають різну кількість нетривіальних вершинних підставок у вершинах з X^n, не є спряженими. Більш того, образи таких елементів в факторгрупі $G/\mathrm{St}_G(n+1)$ належать різним класам спряженості. Це дає можливість вибрати елементи так, що їх довжина буде обмежена індексом підгрупи $\mathrm{St}_G(n+1)$.

Нехай $C = C(X)$ — константа з нерівності (1). Виберемо $m \in \mathbb{N}$ таке, що $|X|^m > C$. Зауважимо, що оскільки група G діє транзитивно на рівнях дерева X^*, то якщо жорсткий стабілізатор $\mathrm{RiSt}_G(v)$ вершини v діє нетривіально на множині вершин vX, то і для кожної вершини $u \in X^{|v|}$ жорсткий стабілізатор $\mathrm{RiSt}_G(u)$ діє нетривіально на множині вершин uX. Оскільки всі жорсткі стабілізатори нетривіальні, то існує така зростаюча послідовність $\{n_k\}_{k\geq 1}$, що жорсткий стабілізатор кожної вершини $u \in X^{n_k+m}$ діє нетривіально на uX для всіх $k \geq 1$. Зафіксуємо довільну вершину $v \in X^{n_k}$. Тоді для кожного $i = 1, \ldots, |X|^m$ існує елемент $g_i \in \mathrm{RiSt}_G(v)$ такий, що g_i стабілізує всі вершини vX^m і серед вершин vX^m існує точно i вершин, в яких вершинні підстановки елемента g_i є нетривіальними. Тоді елементи g_i належать різним класам спряженості групи G. Більш того, образи g_i в факторгрупі $G/\mathrm{St}_G(n_k+m+1)$ представляють різні класи спряженості. Аналогічно будуємо $|X|^m$ елементів з жорстких стабілізаторів для кожної вершини з X^{n_k}. Утворимо $(|X|^m)^{|X|^{n_k}}$ елементів групи як добутки побудованих елементів, де в кожному добутку береться по одному з $|X|^m$ елементів для всіх вершин з $|X|^{n_k}$. Не всі ці елементи представляють різні класи спряженості групи G. Кожен з побудованих елементів може бути спряжений не більше ніж з $[G : \mathrm{St}_G(n_k)]$ інших елементів. Це випливає з того, що всі побудовані елементи належать стабілізатору n_k-го рівня, а елементи g_i є попарно неспряженими для кожної вершини n_k-го рівня. Враховуючи оцінку (1) ми отримаємо $d^{|X|^{n_k}}$ елементів групи для $d = \frac{|X|^m}{C} > 1$, які не є спряженими в групі. Крім того, їх образи представляють неспряжені елементи в факторгрупі $G/\mathrm{St}_G(n_k+m+1)$. Враховуючи оцінку на індекс підгрупи $\mathrm{St}_G(n_k+m+1)$, можна вибрати представники цих образів довжини $\leq C^{|X|^{n_k+m+1}}$. Таким чином, ми побудували $d^{|X|^{n_k}}$ попарно неспряжених елементів групи G довжини $\leq C^{|X|^{n_k+m+1}}$, де $n_k \to \infty$. Звідси випливає, що функція росту спряженості групи G не обмежується зверху функцією n^α з параметром $\alpha = \frac{\log d}{|X|^{m+1}\log C} > 0$. Наше твердження доведено.

Зауважимо, що аналогічні міркування працюють для жорсткого стабілізатора $\mathrm{RiSt}_G(v)$ кожної вершини дерева v, причому з тим самим параметром α, оскільки він залежав лише від потужності алфавіту.

Жорсткий стабілізатор k-го рівня $\mathrm{RiSt}_G(k)$ має скінченний індекс в групі. Можна використати лему 1 з [9], яка стверджує, що для скінченно породженої групи G та її підгрупи H скінченного індексу виконується оцінка $\gamma^c_H(n) \preccurlyeq \gamma^c_G(n)$. Отже, справедлива оцінка $\gamma^c_{\mathrm{RiSt}_G(k)}(n) \preccurlyeq \gamma^c_G(n)$. Крім того, $\mathrm{RiSt}_G(k)$ є прямим добутком $|X|^k$ жорстких стабілізаторів вершин k-го рівня. Класи спряженості прямого добутку груп є добутком класів спряженості. Звідси випливає, що функція $\gamma^c_G(n)$ не обмежується зверху функцією $n^{\alpha|X|^k}$. Оскільки k може бути як завгодно великим, то функція росту спряженості групи G не обмежена зверху поліномом. □

Одразу з означення випливає, що функція росту спряженості обмежена зверху функцією росту групи. Оскільки багато відомих груп проміжного росту, такі як група Григорчука, або група ітерованих монодромій многочлена z^2+i, є гіллястими, то з теореми випливає, що всі такі групи мають проміжний ріст спряженості. Для регулярно гіллястих груп можна дати оцінку знизу на функцію росту спряженості (див. [8, теорема 2.2]).

Твердження 2.1. *Нехай G — скінченно породжена регулярно гілляста група. Існує така константа $0 < \alpha < 1$, що $e^{n^\alpha} \preccurlyeq \gamma^c_G(n)$.*

Доведення. Регулярно гілляста група G містить підгрупу H скінченного індексу, яка в свою чергу містить підгрупу скінченно індексу ізоморфну H^m для $m = |X| \geq 2$. Класи спряженості прямого добутку груп є добутком класів спряженості. Звідси маємо

$$(\gamma^c_H(n))^m \preccurlyeq \gamma^c_{H^m}(n) \preccurlyeq \gamma^c_H(n).$$

Крім того, H містить $\psi(\prod_{x\in X} H)$ як підгрупу скінченного індексу. Використовуючи цю властивість, можна показати, як і в доведенні теореми 1, що підгрупа H має нескінченно багато класів спряженості, тобто $\gamma^c_H(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Якщо монотонно зростаюча функція задовольняє умову $\gamma^m \preccurlyeq \gamma$ і $\gamma(n) \to \infty$, то можна застосувати лему 2.1 з [7]: існує така константа $\alpha > 0$, що

$$e^{n^\alpha} \preccurlyeq \gamma^c_H(n) \preccurlyeq \gamma^c_G(n).$$

□

REFERENCES

[1] Bartholdi L., Grigorchuk R.I., Šunik Z. Branch groups. In: Hazewinkel M. (Eds.) Handbook of algebra, Vol. 3. Elsevier, Amsterdam, 2003, 989–1112.

[2] Breuillard E., de Cornulier Y. *On conjugacy growth for solvable groups*. Illinois J. Math. 2010, **54** (1), 389–395.

[3] Breuillard E., de Cornulier Y., Lubotzky A., Meiri C. *On conjugacy growth of linear groups*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 2013, **154** (2), 261–277. doi:10.1017/S030500411200059X

[4] Grigorchuk R.I. *Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1984, **48** (5), 939–985. (in Russian)

[5] Grigorchuk R.I. *Branch groups*. Mat. Zametki 2000, **67** (6), 852–858. doi:10.4213/mzm903 (in Russian)

[6] Grigorchuk R.I. Just infinite branch groups. In: du Sautoy M., Segal D., Shalev A. (Eds.) New horizons in pro-p groups, Prog. Math., 184. Birkhaüser, Boston, 2000, 121–179.

[7] Grigorchuk R.I., Pak I. *Groups of intermediate growth: an introduction*. Enseign. Math. (2), 2008, **54** (3-4), 251–272.

[8] Guba V., Sapir M. *On the conjugacy growth functions of groups*. Illinois J. Math. 2010, **54** (1), 301–313.

[9] Hull M. *Conjugacy growth in polycyclic groups*. Arch. Math. 2011, **96** (2), 131–134. doi:10.1007/s00013-011-0222-9

[10] Hull M., Osin D. *Conjugacy growth of finitely generated groups*. Adv. Math. 2013, **235**, 361–389. doi:10.1016/j.aim.2012.12.007

Надійшло 16.01.2013

Bondarenko I.V. *Conjugacy growth in branch groups*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 14–18.

We prove that branch groups of automorphisms of regular rooted trees can not have polynomial conjugacy growth.

Key words and phrases: branch group, conjugacy class, growth function.

Бондаренко Е.В. *Рост сопряженности в ветвистых группах* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 14–18.

Доказано, что ветвистые группы автоморфизмов регулярных корневых деревьев не могут иметь полиномиальный рост сопряженности.

Ключевые слова и фразы: ветвистая группа, класс сопряженности, функция роста.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.574

ВАСИЛЬКІВ Я.В., КРАВЕЦЬ М.Я.

ІНТЕГРАЛЬНІ СЕРЕДНІ ПОТЕНЦІАЛІВ ҐРІНА ТА ЇХ СПРЯЖЕНИХ

Васильків Я.В., Кравець М. Я. *Інтегральні середні потенціалів Ґріна та їх спряжених* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 19–29.

Встановлено непокращувані оцінки q-тих $(1 \le q < +\infty)$ лебегових інтегральних середніх пари функцій $F = g + i\breve{g}$, де g — потенціал Ґріна, а $\breve{g}$ — функція, спряжена до g. Вони узагальнюють відповідні результати Я.В. Васильківа та А.А. Кондратюка для логарифмів $\log B$ добутків Бляшке B в термінах лічильної функції $n(r,0,B)$ $(0 < r < 1)$ їх нулів.

Ключові слова і фрази: потенціали Ґріна, спряжені функції, лебегові інтегральні середні, розподіл значень субгармонійних функцій.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
E-mail: marjana_s@ukr.net (Кравець М.Я.)

Вступ

В роботах [8, 9] встановлено непокращувані оцінки лебегових інтегральних середніх $m_q(r,\log B)$, $q \ge 1$, логарифмів добутків Бляшке B в термінах лічильної функції $n(r,0,B)$ $(0 < r < 1)$ їх нулів і наведено необхідні, а також і достатні умови обмеженості $m_q(r,\log B)$ при $r \nearrow 1$. Мета цієї роботи узагальнити ці результати на пару функцій $F = g + i\breve{g}$, де g — потенціал Ґріна, а $\breve{g}$ — функція спряжена до g. У цьому розділі наведемо необхідні означення та допоміжні твердження.

В роботі [7] введено поняття функції $\breve{u}$, спряженої до субгармонійної функції u в зірковій відносно початку координат області, встановлено зображення та вивчено деякі властивості таких функцій, зокрема, показано, що у випадку коли $u = \log|f|$, f — голоморфна, спряжена до неї функція $\breve{u}$ є деякою гілкою $\operatorname{Arg} f$.

При $z \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $t \ge 1$, покладемо

$$l(z,a) = \begin{cases} \int\limits_0^z (\zeta - a)^{-1}\, d\zeta, & z \neq ta; \\ \log\left|1 - \dfrac{z}{a}\right| + i\pi, & z = ta. \end{cases}$$

Нагадаємо, що множину $G \subset \mathbb{C}$ називають зірковою множиною відносно початку координат, якщо разом з точкою z вона містить відрізок $[0;z]$. Через $\mathring{E}$ позначатимемо внутрішність множини E.

Нехай u — субгармонійна в області G функція, $\mu[u]$ — її міра Ріса, $0 \notin \operatorname{supp}\mu[u]$, де $\operatorname{supp}\mu[u]$ — носій цієї міри. За теоремою Ріса про зображення (див., наприклад, [6, с. 123])

2010 *Mathematics Subject Classification:* 31A05, 31A20.

для довільної компактної підмножини $K \subset G$ з непорожньою внутрішністю $\overset{\circ}{K}$ і для довільної точки $z \in \overset{\circ}{K}$ виконується

$$u(z) = h_K(z) + \int\limits_K \log\left|1 - \frac{z}{a}\right| d\mu_a[u],$$

де функція h_K гармонійна в $\overset{\circ}{K}$.

Означення 1 ([7]). *Нехай G — зіркова область в $\mathbb{C}$, u — субгармонійна в G функція, $u(0) = 0$, $0 \notin \operatorname{supp} \mu[u]$. Спряжена функція й до u в G визначається співвідношенням*

$$\breve{u}(z) = \widetilde{h}_K(z) + \int\limits_K \operatorname{Im}(l(z,a))\, d\mu_a[u]$$

де K — компактна підмножина в G із зірковою внутрішністю $\overset{\circ}{K}$, $\widetilde{h}_K$ — гармонійно спряжена до h_K в $\overset{\circ}{K}$ функція, $\widetilde{h}_K(0) = 0$.

Нехай $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $\overline{\mathbb{D}}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$, $0 < R \le +\infty$. Нехай також $u(z)$ — субгармонійна в $\mathbb{D}_R$ функція, гармонійна в деякому околі точки $z = 0$, $u(0) = 0$; $\breve{u}(z)$ — спряжена функція до $u(z)$; $F(z) = u(z) + i\breve{u}(z)$, $z \in \mathbb{D}_R$. Покладемо ($k \in \mathbb{Z}$, $|z| = r > 0$)

$$n_k(r,u) = \int\limits_{|a|\le r} \left(\frac{\bar{a}}{|a|}\right)^k d\mu_a[u], \qquad n(r,u) = n_0(r,u), \qquad N(r,u) = \int\limits_0^r \frac{n(t,u)}{t}\, dt.$$

Нехай μ — невід'ємна борелева міра в $\mathbb{D}$ така, що $0 \notin \operatorname{supp}\mu$ і $\int\limits_{\mathbb{D}} (1-|a|)\, d\mu_a < +\infty$. Через $G_\mu(z)$ позначатимемо потенціал Ґріна міри μ (див., наприклад, [5, с. 518]):

$$G_\mu(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} \log\left|\frac{a - z}{1 - \bar{a}z}\right| d\mu_a, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Нагадаємо, що $G_\mu(z)$ є субгармонійною в $\mathbb{D}$ функцією. Якщо ж $\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_{a_j}$, де δ_a — міра Дірака, зосереджена в точці a, то $G_\mu = \log|B|$, де B — добуток Бляшке з нулями $Z(B) = \{a_j\}$. Покладемо $g(z) = G_\mu(z) - G_\mu(0)$. Нехай $z \in \mathbb{D}$. Покладемо

$$p_\mu(z) = \int_0^{|z|} \frac{dt}{t} \int_{|a|\le t} \mathcal{P}\left(\bar{z}, t\frac{\bar{a}}{|a|}\right) d\mu_a,$$

$$q_\mu(z) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_{|a|\le t} \mathcal{P}\left(\frac{\bar{a}}{|a|}, tz\right) d\mu_a + \int_{|z|}^1 \frac{dt}{t} \int_{|a|\le t} \mathcal{P}\left(t\frac{\bar{a}}{|a|}, z\right) d\mu_a,$$

де $\mathcal{P}(w,z) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{w+z}{w-z}\right)$ — ядро Пуассона.

Для функції $f(e^{i\theta}) \in L^1[0;2\pi]$ через $\widetilde{f}(e^{i\theta}) = (H * f)(e^{i\theta})$ позначатимемо згортку періодичного розподілу Гільберта $H = -i\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sign}(k) e^{ik\psi}$, $\psi \in [0;2\pi]$, з функцією f (див., наприклад, [2, т. 2, с. 103]), де $\operatorname{sign} x = \dfrac{x}{|x|}$, при $x \ne 0$ і $\operatorname{sign} 0 = 0$. Тобто

$$c_k(\widetilde{f}) = -i\operatorname{sign}(k) c_k(f), \quad \text{де} \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta}\, d\theta, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Лема 1 ([7, 6]). *Нехай $F = g + i\breve{g}$. Тоді для кожного фіксованого $r \in (0;1)$*

$$F(re^{i\theta}) = g(re^{i\theta}) + i(\widetilde{g}(re^{i\theta}) - \widetilde{p}_\mu(re^{i\theta})) = g(re^{i\theta}) - \frac{i}{2}(\widetilde{p}_\mu(re^{i\theta}) + \widetilde{q}_\mu(re^{i\theta}))$$

для майже всіх $\theta \in [0;2\pi]$.

У розділі 2 істотно використовуються такі теореми. Нехай q і q' спряжені числа, тобто $1/q + 1/q' = 1$.

Теорема 1 ([4]). *Якщо $q \in (1;+\infty)$, $f \in L^q[0,2\pi]$, то $\|\widetilde{f}\|_q \le C\dfrac{q^2}{q-1}\|f\|_q$, де C — деяка додатна стала.*

Теорема 2 ([3]). *Нехай $G_\mu(z)$ — потенціал Ґріна. Тоді для довільного $q \in [1;+\infty)$ існує така стала $C_1(q)$, що*

$$(1-r)^{1/q'} m_q(r, G_\mu) \le C_1(q) \int\limits_r^1 \frac{n(t,g)}{t}\, dt, \quad 0 < r < 1.$$

1 Інтегральні середні $m_1(r,F)$.

Зростання інтегрального середнього $m_1(r,F)$ описується такою теоремою.

Теорема 3. 1^0. *Для всіх $r \in (0;1)$ правильна нерівність*

$$m_1(r,F) \le \frac{4}{\pi}\int\limits_0^1 \log\frac{1}{1-t}\frac{n(t,g)}{t}\, dt + 3\int\limits_0^1 \frac{n(t,g)}{t}\, dt.$$

2^0. *Умова*

$$\int\limits_0^1 \log\frac{1}{1-t} n(t,g)\, dt < +\infty \tag{1}$$

достатня для виконання співвідношення

$$\sup_{0<r<1} m_1(r,F) < +\infty. \tag{2}$$

3^0. *Нехай додатня борелева міра μ зосереджена на одному промені. Тоді умова (1) є необхідною і достатньою для виконання (2).*

4^0. *Існує потенціал Ґріна G_μ такий, що функція $m_1(r,F)$ необмежена на (0;1).*

Доведення. 1^0. Нехай $g(z) = G_\mu(z) - G_\mu(0)$. Тоді

$$m_1(r,g) \le m_1(r,G_\mu) + \int\limits_{\mathbb{D}} \log\frac{1}{|a|}\, d\mu_a \le \int\limits_0^r n(t,g)\frac{dt}{t} + \int\limits_0^1 n(t,g)\frac{dt}{t} \le 2N(1,g). \tag{3}$$

Нерівність $m_1(r,F) \le m_1(r,g) + \frac{1}{2}m_1(r,\widetilde{q}_\mu) + \frac{1}{2}m_1(r,\widetilde{p}_\mu)$, $0 < r < 1$, виконується з огляду на зображення функції F (див. лему 1).

На підставі того (див. [4, с. 107, 112]), що

$$\widetilde{\mathcal{P}}(re^{-i\theta}, te^{-i\varphi}) = \frac{2rt\sin(\theta-\varphi)}{r^2 - 2rt\cos(\theta-\varphi) + t^2},$$

одержимо

$$m_1(r,\widetilde{p}_\mu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\widetilde{p}_\mu(re^{i\theta})|\,d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{r} \frac{n(t,g)}{t}\,dt \int\limits_0^{2\pi} \frac{2rt|\sin\theta|d\theta}{r^2-2rt\cos\theta+t^2}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{r} \log\frac{r+t}{r-t}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1}\log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{n(xr,g)}{x}\,dx \le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1}\log\frac{2}{1-x}\cdot\frac{n(x,g)}{x}\,dx, \tag{4}$$

для $0<r<1$. Аналогічно маємо

$$m_1(r,\widetilde{q}_\mu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\widetilde{q}_\mu(re^{i\theta})|\,d\theta \le \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{1}\log\frac{1+tr}{1-tr}\frac{n(t,g)}{t}\,dt + \int\limits_r^{1}\log\frac{t+r}{t-r}\frac{n(t,g)}{t}\,dt\right), \tag{5}$$

для $0<r<1$. Оцінюючи праву частину нерівності (5) насамперед зауважимо, що

$$\log\frac{1+tr}{1-tr} \le \log\frac{1+t}{1-t} \le \log\frac{2}{1-t}, \qquad t>0, \quad r<1. \tag{6}$$

Крім того, оскільки $\frac{r}{x}\le x$ при $\sqrt{r}\le x\le 1$ і $\frac{t+r}{t-r}\le\frac{1+t}{1-t}$ при $\sqrt{r}\le t\le 1$, то

$$\int\limits_r^{1}\log\frac{t+r}{t-r}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt = \int\limits_r^{\sqrt{r}}\log\frac{t+r}{t-r}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt + \int\limits_{\sqrt{r}}^{1}\log\frac{t+r}{t-r}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt$$

$$=\int\limits_{\sqrt{r}}^{1}\log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{n(r/x,g)}{x}\,dx + \int\limits_{\sqrt{r}}^{1}\log\frac{t+r}{t-r}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt \tag{7}$$

$$\le 2\int\limits_{\sqrt{r}}^{1}\log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{n(x,g)}{x}\,dx \le 2\int\limits_0^{1}\log\frac{2}{1-x}\cdot\frac{n(x,g)}{x}\,dx.$$

Підставивши (6) та (7) в (5) одержимо

$$m_1(r,\widetilde{q}_\mu) \le \frac{6}{\pi}\int\limits_0^{1}\log\frac{2}{1-t}\frac{n(t,g)}{t}\,dt, \qquad 0<r<1. \tag{8}$$

Тоді враховуючи (4), (5), (8) та (3) маємо

$$m_1(r,F) \le \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{1}\log\frac{1}{1-t}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt + \left(2+\frac{4\log 2}{\pi}\right)\int\limits_0^{1}\frac{n(t,g)}{t}\,dt$$

$$\le\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{1}\log\frac{1}{1-t}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt + 3\int\limits_0^{1}\frac{n(t,g)}{t}\,dt,$$

що завершує доведення пункту 1^0.

2^0. Твердження цього пункту безпосередньо випливає зі співвідношень (1) та (2).

3^0. З огляду на попередній пункт потрібно довести лише імплікацію (3)⇒(2). Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що міра μ зосереджена на додатному промені. Тоді маємо

$$m_1(r,F) \ge \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\widetilde{q}_\mu(re^{i\theta})+\widetilde{p}_\mu(re^{i\theta})|\,d\theta, \qquad 0<r<1. \tag{9}$$

З означення функції $p_\mu(z)$ та $q_\mu(z)$ одержуємо

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\widetilde{q}_\mu(re^{i\theta})+\widetilde{p}_\mu(re^{i\theta})|\,d\theta = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\int\limits_0^{1}\frac{2rt\sin t}{1-2rt\cos t+t^2r^2}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt\right.$$

$$\left.+\int\limits_r^{1}\frac{2rt\sin\theta}{r^2-2rt\cos\theta+t^2}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt + \int\limits_0^{r}\frac{2rt\sin\theta}{r^2-2rt\cos\theta+t^2}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt\right|\,d\theta \tag{10}$$

$$\ge\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^{r}\frac{2rt\sin\theta}{r^2-2rt\cos\theta+t^2}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{r}\log\frac{r+t}{r-t}\frac{n(t,g)}{t}\,dt,$$

$0<r<1$. Оскільки

$$\log\frac{r+t}{r-t} \ge \log\frac{1+t}{1-t} \ge \log\frac{1}{1-t}, \qquad 0<t<r<1, \tag{11}$$

то враховуючи нерівності (10) та (9), зі співвідношень (11) маємо

$$\sup_{0<r<1} m_1(r,F) \ge \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{1}\log\frac{1}{1-t}\,\frac{n(t,g)}{t}\,dt, \tag{12}$$

що завершує доведення пункту 3^0.

4^0. Нехай міра μ зосереджена на додатному промені така, що

$$\frac{C_1}{1-r}\,\log^{-2}\frac{1}{1-r} \le n(r,g) \le \frac{C_2}{1-r}\,\log^{-\alpha}\frac{1}{1-r},$$

де $1<\alpha\le 2$, C_1, C_2 — деякі додатні сталі. Умова $\int\limits_{\mathbb{D}}(1-|a|)\,d\mu_a<+\infty$ рівносильна до умови

$$\int\limits_{r_0}^{1} n(t,g)\,dt < +\infty, \qquad 0<r_0=\inf\{r>0:\ \operatorname{supp}\mu\cap\overline{\mathbb{D}}_r\ne\varnothing\}.$$

Оскільки

$$\int\limits_{r_0}^{1} n(t,g)\,dt \le C_2\int\limits_{r_0}^{1}\frac{1}{1-t}\,\log^{-\alpha}\frac{1}{1-t}\,dt = C_2\int\limits_{b_0}^{+\infty}\frac{dy}{y^\alpha} < +\infty,$$

де $b_0=-\log(1-r_0)$, то потенціал G_μ існує. Крім того

$$\int\limits_{r_0}^{1}\log\frac{1}{1-t}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt \ge C_1\int\limits_{r_0}^{1}\log^{-1}\frac{1}{1-t}\,\frac{dt}{1-t} = C_1\int\limits_{b_0}^{+\infty}\frac{dy}{y} = +\infty.$$

Тоді, враховуючи співвідношення (12), одержуємо $\sup\limits_{0<r<1} m_1(r,F)=+\infty$. □

Зауважимо, що умова (1) рівносильна до умови О. Фростмана

$$\int\limits_{\mathbb{D}}(1-|a|)\log\frac{1}{1-|a|}\,d\mu_a < +\infty. \tag{13}$$

У цьому неважко переконатися, записавши ліву частину нерівності (13) за допомогою інтеграла Стілтьєса, інтегруючи частинами та враховуючи нерівності

$$(1-r)\log\frac{1}{1-r}\,n(r,g) \le \int\limits_r^{1}\log\frac{1}{1-t}\,n(r,g)\,dt = o(1), \quad r\nearrow 1,$$

$$(1-r)\log\frac{1}{1-r}\,n(t,g) \le \int_0^r (1-t)\,\log\frac{1}{1-t}\,dn(t,g) = O(1), \quad r \nearrow 1.$$

2 Інтегральні середні $m_q(r,F)$ $(q>1)$.

Поведінку q-тих лебегових інтегральних середніх $m_q(r,F)$ $(1<q<+\infty)$ функції $F = g + i\tilde{g}$ описує наступна теорема.

Теорема 4. 1^0. *Для довільного $q \in (1;+\infty)$ знайдеться така стала $M_1(q)>0$, що при $r \nearrow 1$ виконується нерівність*

$$m_q(r,F) \le M_1(q)\left(\frac{1}{(1-r)^{1/q'}}\int_r^1 \frac{n(t,g)}{t}\,dt + \int_0^1 \frac{n(rt,g)}{(1-t)^{1/q'}}\,dt\right).$$

2^0. *Нехай $G_\mu(z)$ — потенціал Ґріна, міра μ якого зосереджена на скінченній системі k радіальних променів. Тоді для довільного $q \in (1;+\infty)$ знайдеться така стала $M_2(q)>0$, що при $r \nearrow 1$ виконується нерівність*

$$m_q(r,F) \ge \frac{M_2(q)}{k}\int_0^r \frac{n(t,g)}{(1-t)^{1/q'}}\,dt.$$

3^0. *Нехай $G_\mu(z)$ — потенціал Ґріна, міра μ якого зосереджена на скінченній системі радіальних променів, $1<q<+\infty$. Тоді умова*

$$\int_0^1 \frac{n(t,g)}{(1-t)^{1/q'}}\,dt < +\infty$$

є необхідною і достатньою для обмеженості функції $m_q(r,F)$ при $r \nearrow 1$.

4^0. *Нехай $1<q<+\infty$ і*

$$n(r,g) = O((1-r)^{-1/q}l(r)), \quad r \nearrow 1, \tag{14}$$

де $l(r)$ — деяка додатна на $(0;1)$ функція така, що

$$\int_0^1 (1-t)^{-1}l(t)dt < +\infty, \tag{15}$$

то

$$m_q(r,F) = O(1), \quad r \nearrow 1. \tag{16}$$

Навпаки, нехай для потенціалу Ґріна $G_\mu(z)$, міра μ якого зосереджена на скінченній системі радіальних променів, виконується (16), $1<q<+\infty$. *Тоді знайдеться така додатна функція $l(t) = l_q(t)$, що $\lim\limits_{t\to 1-0} l(t) = 0$ і виконується співвідношення* (15) *та* (14).

5^0. *Нехай $n(r,g) = O((1-r)^{-\alpha})$, $r \nearrow 1$, $0<\alpha\le\alpha_0$.*

а) Якщо $\alpha_0 < 1/q$, $1<q<+\infty$, то виконується (16).

б) Якщо ж $\alpha_0 \ge 1/q$, $1<q<+\infty$, то існує потенціал Ґріна G_μ, для якого виконується

$$\int_0^1 n(t,g)(1-t)^{-1/q'}dt < +\infty \tag{17}$$

і $\lim\limits_{r\to 1-0} m_q(r,F) = +\infty$.

Доведення. 1^0. Нехай $g(z) = G_\mu(z) - G_\mu(0)$, $z = re^{i\theta}$, $a = |a|\,e^{i\varphi}$. З огляду на лему 1 та нерівність Мінковського, для довільних $q \in (1;+\infty)$ та $r \in (0;1)$ отримуємо

$$m_q(r,F) \le m_q(r,g) + m_q(r,\tilde{g}) + m_q(r,\tilde{p}_\mu). \tag{18}$$

З огляду на теорему 1, маємо $m_q(r,\tilde{g}) + m_q(r,\tilde{p}_\mu) \le M(q)(m_q(r,g) + m_q(r,p_\mu))$, а звідси, з урахуванням теореми 2 та (18) для всіх $0<r<1$ знаходимо

$$\begin{aligned} m_q(r,F) \le & C_1(q)(1+M(q))\left(\frac{1}{(1-r)^{1/q'}}\int_r^1 \frac{n(t,g)}{t}\,dt + \int_0^1 \frac{n(t,g)}{t}\,dt\right) \\ & + M(q)m_q(r,p_\mu) \le \frac{2C_1(q)(1+M(q))}{(1-r)^{1/q'}}\int_r^1 \frac{n(t,g)}{t}\,dt. \end{aligned} \tag{19}$$

де $M_1(q) = C_1(q)(1+M(q))$.

Для оцінки останнього доданку в правій частині нерівності (19) двічі застосуємо інтегральну нерівність Мінковського (див. [3, с. 24]) і зробимо заміну змінної $t = r\tau$. Отримуємо

$$\begin{aligned} m_q(r,p_\mu) &\le \int_0^r \frac{dt}{t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_{|a|\le t} \mathcal{P}(r,te^{i(\theta-\varphi)})\,d\mu_a\right)d\theta\right)^{1/q} \\ &\le \int_0^r \frac{dt}{t}\int_{|a|\le t} d\mu_a \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\mathcal{P}(r,te^{i(\theta-\varphi)})\right)^q d\theta\right)^{1/q} \\ &= \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau}\int_{|a|\le r\tau} d\mu_a \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\mathcal{P}(1,re^{i(\theta-\varphi)})\right)^q d\theta\right)^{1/q}, \quad 1<q<+\infty. \end{aligned}$$

Зауважимо, що внутрішній інтеграл в останній нерівності не залежить від φ. Тому при $1<q<+\infty$, $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'} = 1$, $0<t<1$, враховуючи нерівність

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\mathcal{P}(1,te^{ix})\right)^q dx\right)^{1/q} &\le \left(\max_{0\le x\le 2\pi}\mathcal{P}(1,te^{ix})\right)^{1/q'}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{P}(1,te^{ix})\,dx\right)^{1/q'} \\ &= \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1/q'} \le \frac{2^{1/q'}}{(1-t)^{1/q'}}, \end{aligned}$$

знаходимо

$$m_q(r,p_\mu) \le 2^{1/q'}\int_0^1 \frac{n(rt,g)}{t(1-t)^{1/q'}}\,dt, \qquad 0<r<1,$$

що разом з нерівністю (19) дає

$$m_q(r,F) \le M_1(q)\left(\frac{1}{(1-r)^{1/q'}}\int_r^1 \frac{n(t,g)}{t}\,dt + \int_0^1 \frac{n(rt,g)}{(1-t)^{1/q'}}\,dt\right),$$

де $M_1(q)$ — деяка додатна стала.

2^0. Нехай $g(z) = G_\mu(z) - G_\mu(0)$, $z = re^{i\theta}$. Нагадаємо, що за лемою 1 $F = g + i\widetilde{g} = g + i(\widetilde{g} - \widetilde{p}_\mu)$. Тоді, враховуючи нерівність Мінковського, одержимо

$$\begin{aligned} m_q(r, \widetilde{p}_\mu) &= m_q(r, i(\widetilde{g} - \widetilde{p}_\mu) + g - g - i\widetilde{g}) \\ &\le m_q(r, g + i\widetilde{g}) + m_q(r, F), \qquad 1 < q < +\infty, \quad 0 < r < 1. \end{aligned} \tag{20}$$

Згідно з теоремою 1, маємо $m_q(r, \widetilde{g}) \le M(q)\, m_q(r, g)$, $0 < r < 1$, і тому

$$m_q(r, g + i\widetilde{g}) \le (1 + M(q)) m_q(r, g) \le (1 + M(q)) m_q(r, F), \tag{21}$$

оскільки $m_q(r, g) \le m_q(r, F)$. Тоді підставивши (21) в (20), одержимо

$$m_q(r, \widetilde{p}_\mu) \le M_3(q) m_q(r, F), \quad 0 < r < 1, \tag{22}$$

де $M_3(q) = 2 + M(q)$.

Отже, нам залишилося дати оцінку знизу при $r \nearrow 1$ функцій $m_q(r, \widetilde{p}_\mu)$, $1 < q < +\infty$. Нехай борелева міра $\mu \ge 0$ зосереджена на скінченній системі k променів $\{te^{i\varphi_j}\}_{j=1}^k$, $0 \le \varphi_1 < \dots < \varphi_k < 2\pi$, $0 < t < 1$, $n_j(r) = \mu(\{te^{i\varphi_j}\})$, $0 < t \le r < 1$.

Очевидно, що $\sum\limits_{j=1}^{k} n_j(r) = n(r, g)$. У цьому випадку функція $p_\mu(z)$ набуде вигляду

$$p_\mu(z) = \sum_{j=1}^{k} \int_0^r \frac{n_j(t)}{t} \mathcal{P}(r, te^{i(\theta - \varphi)})\, dt, \quad z = re^{i\theta}.$$

Позначимо

$$L(re^{i\theta}) = \frac{\pi r}{M(q')k(\pi r^2 + 4)} \sum_{j=1}^{k} \int_0^r \left(\left| \frac{1 + \rho e^{i(\theta - \varphi_j)}}{1 - \rho e^{i(\theta - \varphi_j)}} \right|^{1/q'} \right)^{\sim} d\rho.$$

Добре відомо [3, с. 118], що функція $F(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, $z \in \mathbb{D}$, належить до просторів Гарді $H^\alpha(\mathbb{D})$, $0 < \alpha < 1$, і

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\rho re^{ix})|^\alpha\, dx \le M_4(\alpha) |F(0)|^\alpha = M_4(\alpha),$$

де $M_4(\alpha) = 1/\cos(\dfrac{\pi\alpha}{2})$. Окрім того, функція $|F(z)|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, субгармонійна. Тому [див. 3, с. 72]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\rho re^{ix})|^\alpha \mathcal{P}(r, te^{ix})\, dx \ge |F(\rho t)|^\alpha \ge (1 - \rho t)^{-\alpha}, \qquad t > 0, \quad \rho < r. \tag{23}$$

Застосувавши теорему 1 до функції $L(z)$, а також, врахувавши нерівність Мінковського та нерівності

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1 + \rho re^{ix}}{1 - \rho re^{ix}} \right| dx \le 1 + \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{1 - \rho r}, \qquad \int_0^r \log \frac{2}{1 - \rho r}\, d\rho \le \frac{\log 2e}{r} \le \frac{2}{r},$$

знаходимо

$$m_{q'}(r, L) \le \frac{\pi r}{k(\pi r^2 + 4)} \sum_{j=1}^{k} \int_0^r d\rho \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1 + \rho re^{i(\theta - \varphi_j)}}{1 - \rho re^{i(\theta - \varphi_j)}} \right| d\theta \right)^{1/q'}$$

$$\le \frac{\pi r}{\pi r^2 + 4} \int_0^r \left(1 + \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{1 - \rho r} \right)^{1/q'} d\rho \le \frac{\pi r}{\pi r^2 + 4} \left(r + \frac{2}{\pi} \int_0^r \log \frac{2}{1 - \rho r}\, d\rho \right) \le 1.$$

Тому, з урахуванням нерівності Гельдера, для всіх $1 < q < +\infty$, $0 < r < 1$, одержуємо

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{p}_\mu(re^{i\theta}) L(re^{i\theta})\, d\theta \right| \le m_q(r, \widetilde{p}_\mu) m_{q'}(r, L) \le m_q(r, \widetilde{p}_\mu). \tag{24}$$

Далі, враховуючи [1, с. 225]

$$\left(\tilde{f}(e^{i\theta})\right)^{\sim} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{ix})\, dx - f(e^{i\theta})$$

та нерівність (22) одержимо

$$-\widetilde{L}(re^{i\theta}) \ge \frac{\pi r}{M(q')k(\pi r^2 + 4)} \left(\sum_{j=1}^{k} \int_0^r \left| \frac{1 + \rho re^{i(\theta - \varphi_j)}}{1 - \rho re^{i(\theta - \varphi_j)}} \right|^{1/q'} d\rho - krM_4\left(\frac{1}{q'}\right) \right). \tag{25}$$

Тоді, з огляду на співвідношення дуальності [4, с. 117] зі співвідношень (24), (25) та (23) випливає, що

$$m_q(r, \widetilde{p}_\mu) \ge -\int_0^{2\pi} p_\mu(re^{i\theta}) \widetilde{L}(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \ge \frac{\pi r}{M(q')k(\pi r^2 + 4)}$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \int_0^r \frac{n_j(t)}{t}\, dt \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} \left| \frac{1 + \rho re^{i(\theta - \varphi_\nu)}}{1 - \rho re^{i(\theta - \varphi_\nu)}} \right|^{1/q'} \mathcal{P}(r, te^{i(\theta - \varphi_j)}) \frac{d\theta}{2\pi} - krM_4(\frac{1}{q'}) \int_0^r \frac{n(t,g)}{t}\, dt \right)$$

$$\ge \frac{\pi r}{M(q')k(\pi r^2 + 4)} \left(\int_0^r \frac{n(t,g)}{t}\, dt \int_0^r \frac{d\rho}{(1 - \rho t)^{1/q'}} - krM_4(1/q') \int_0^r \frac{n(t,g)}{t}\, dt \right).$$

Зауважимо, що

$$\int_0^r \frac{d\rho}{(1 - \rho t)^{1/q'}} \ge \int_0^t \frac{d\rho}{(1 - \rho t)^{1/q'}} \ge \frac{t}{(2(1 - t))^{1/q'}}, \tag{26}$$

$$\int_0^r \frac{n(t,g)}{t}\, dt = o\left(\int_0^r \frac{n(t,g)}{(1 - t)^{1/q'}}\, dt \right), \quad r \nearrow 1, \tag{27}$$

$$\frac{\pi r}{\pi r^2 + 4} > \frac{1}{5} \tag{28}$$

при $\frac{1}{2} \le r < 1$.

Співвідношення (26)–(28) разом з (22) дають

$$m_q(r, F) \ge \frac{M_5(q)}{k} \int_0^r \frac{n(t,g)}{(1 - t)^{1/q'}}\, dt, \quad \text{де} \quad M_5(q) = \frac{1}{20M(q') + 10}, \quad 1/q + 1/q' = 1.$$

3^0. Твердження цього пункту негайно випливає з тверджень пунктів 1^0 та 2^0 цієї теореми.

4^0. Співвідношення (16) легко випливає з твердження пункту 1^0 цієї теореми, співвідношень (14), (15) та

$$(1-t)^{-1/q'}n(t,g) = O((1-t)^{-1}l(t)), \quad t \nearrow 1.$$

Навпаки, нехай виконується співвідношення (16). Спочатку зауважимо, що

$$\int_0^1 n(t,g)dt = \int_{\mathbb{D}} (1-|a|)d\mu_a < +\infty.$$

Тому для всіх $r \in (0;1)$ маємо

$$n(r,g)(1-r) \leq \int_r^1 n(t,g)dt,$$

або

$$n(r,g)(1-r)^{1/q} \leq (1-r)^{-1/q'} \int_r^1 n(t,g)dt := l(r), \quad 1/q + 1/q' = 1,$$

тобто

$$n(r,g) \leq (1-r)^{-1/q} l(r). \tag{29}$$

Враховуючи (29), необхідне твердження буде встановлено, якщо ми покажемо, що $\lim\limits_{r\to 1} l(r) = 0$ і функція $l(r)$ задовольняє умову (15). Справді, з умови (17) випливає, що

$$n(r,g)(1-r)^{1/q} \leq q^{-1} \int_r^1 n(t,g)(1-t)^{-1/q'}dt \to 0, \quad r \nearrow 1.$$

Тоді, застосовуючи правило Лопіталя, одержимо

$$\lim_{r\to 1} l(r) = \lim_{r\to 1} (1-r)^{-1/q'} \int_r^1 n(t,g)dt = q' \lim_{r\to 1} n(r,g)(1-r)^{1/q} = 0.$$

Далі, інтегруючи частинами, дістаємо

$$\int_0^1 \frac{l(t)}{1-t}dt = \int_0^1 \frac{\int_t^1 n(\tau,g)d\tau}{(1-t)^{1+1/q'}}dt = q' \left[\int_0^1 \frac{n(t,g)}{(1-t)^{1/q'}}dt - \int_0^1 n(t,g)dt \right]$$
$$\leq q' \int_0^1 n(t,g)(1-t)^{-1/q'}dt,$$

що разом з (17) дає (15).

5^0. Твердження а) негайно випливає з твердження пункту 4^0 при $l(r) = (1-r)^{1/q-\alpha_0}$. Для доведення твердження б) досить взяти такий потенціал Ґріна G_μ, міра μ якого зосереджена на скінченній системі радіальних променів, що

$$C_1(1-r)^{-1/q} \leq n(r,g) \leq C_2(1-r)^{-\alpha}, \quad 1 < q < +\infty, \quad r \nearrow 1,$$

де C_1, C_2 — деякі додатні сталі, та врахувати твердження пункту 2^0 цієї теореми. □

References

[1] Dyn'kin E.M. *Methods of the theory of singular integrals (Hilbert transform and Calderon-Zygmund theory).* Itogi nauki i tekhniki. Sovremen. Problemy mat. Fundam. Naprav. VINITI 1987, 15, 197–292. (in Russian)

[2] Edwards R. Fourier series a modern introduction. V. 1. Springer-Verlag, New York, 1979.

[3] Eiko V.V., Kondratyuk A.A. *Integral logarithmic means of Blaschke products.* Math. Notes 1988, 64, 199–206. (in Russian) doi:10.1007/BF02310301

[4] Garnett J.B. Bounded analytic functions. Academic Press, New York, 1981.

[5] Hayman W.K. Subharmonic functions. V. 2. Academic Press Ltd, London, 1989.

[6] Hayman W.K., Kennedy P.B. Subharmonic functions. V. 1. Academic Press Inc., London, 1976.

[7] Kondratyuk A.A., Vasyl'kiv Ya.V. *Conjugate of subharmonic function.* Mat. Stud. 2000, 13, 173–180.

[8] Vasyl'kiv Ya.V. *On the boundedness of the total variation of the logarithm of a Blaschke product.* Ukrainian Math. J. 1999, 51, 1449–1455. (in Ukrainian) doi:10.1007/BF02525267

[9] Vasyl'kiv Ya.V., Kondratyuk A.A. *Integral logarithmic means of Blaschke products.* Visn. Lviv University 1999, 53, 52–61. (in Ukrainian)

Надійшло 18.06.2012

Vasyl'kiv Ya.V., Kravec M.Ya. *Integral mean of Green's potentials and their conjugate.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 19–29.

The best possible estimates for Lebesgue integral means $m_q(r,F)$ $(1 \leq q < +\infty)$ for the pair of functions $F = g + i\,\tilde{g}$, here g — Green's potential, $\tilde{g}$ — function conjugate to g, was obtained. It generalizes well-known results of Ya.V. Vasyl'kiv and A.A. Kondratyuk for logarithms $\log\ B$ of Blaschke products B in terms of counting function $n(r,0,B)$ $(0 < r < 1)$ of their zeroes.

Key words and phrases: Green's potentials, conjugate function, Lebesgue integral means, distribution of values of subharmonic functions.

Василькив Я.В., Кравец М.Я. *Интегральные средние потенциалов Грина и их сопряженных //* Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 19–29.

Установлено неулучшаемые оценки q-тых $(1 \leq q < +\infty)$ интегральных средних Лебега пары функций $F = g + i\,\tilde{g}$, где g — потенциал Грина, а $\tilde{g}$ — функция, сопряженная к g. Они обобщают соответственные результаты Я.В. Василькива и А.А. Кондратюка для логарифмов $\log\ B$ произведений Бляшке B в терминах счетной функции $n(r,0,B)$ $(0 < r < 1)$ их нулей.

Ключевые слова и фразы: потенциалы Грина, сопряженная функция, интегральные средние Лебега, распределение значений субгармонических функций.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.5

VYNNYTSKYI B.V.[1], DILNYI V.M.[2]

ON ESTIMATIONS OF SOLUTIONS OF ONE CONVOLUTION TYPE EQUATION

Vynnytskyi B.V., Dilnyi V.M. *On estimations of solutions of one convolution type equation*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 30–35.

We consider a convolution type equation in a semi-strip for the functions belonging to the Hardy-Smirnov space. Estimations of solutions are obtained in terms of analytic continuation.

Key words and phrases: weighted Hardy space, convolution equation, outer function, cyclic function.

[1] Ivan Franko Pedagogical University, Drohobych, Ukraine
[2] Ivan Franko National University, Lviv, Ukraine
E-mail: dilnyi@ukr.net (Dilnyi V.M.)

INTRODUCTION

For $p \in [1;\infty)$ the Hardy space $H^p(\mathbb{C}_+)$ consists of analytic functions on the half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ such that

$$\|f\|_* := \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dy \right\}^{1/p} < +\infty.$$

A function $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ has almost everywhere (a.e.) on $i\mathbb{R}$ angular boundary values $f(iy)$ and $f(iy) \in L^p(-\infty;+\infty)$. Each $H^p(\mathbb{C}_+), 1 \le p < +\infty$, is a Banach space with respect to the above norm. Previous and other properties of this space are presented in [10].

The following classical result (see [11, 12]) about convolution equation on the ray has many important and elegant applications for the spectral theory of linear operators (see [3, 4, 7]).

Theorem A. *If $q \in L_2(-\infty;0)$ and $Q(z) = \int_{-\infty}^{0} q(t)e^{tz}\,dt$, then the following statements are equivalent:*

1) *the equation*

$$\int_{-\infty}^{0} \psi(t+\tau)q(t)\,dt = 0, \quad \tau \le 0, \tag{1}$$

has a nontrivial solution $\psi \in L_2(-\infty;0)$;

2) *the system $\{Q(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ is not complete in $H^2(\mathbb{C}_+)$;*

3) *Q is not outer function for $H^2(\mathbb{C}_+)$.*

A function $Q \in H^2(\mathbb{C}_+)$ is called an outer function for $H^2(\mathbb{C}_+)$ if $Q(z) \ne 0$ for all $z \in \mathbb{C}_+$,

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln|Q(x)|}{x} = 0,$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D55, 30D40, 45E10.

and singular boundary function of Q is a constant.

The necessary part of Theorem A is based on the following result.

Theorem B. *Suppose $q \in L_2(-\infty;0)$, $Q(z) = \int_{-\infty}^{0} q(t)e^{tz}\,dt$. Function $\psi \in L_2(-\infty;0)$ is a solution of equation (1) if and only if the function $Q(iy)\Psi(iy)$, $y \in \mathbb{R}$, is the angular boundary function on $i\mathbb{R}$ of some function $P \in H^1(\mathbb{C}_+)$, where $\Psi(z) = \int_{-\infty}^{0} \psi(t)e^{-tz}\,dt$.*

For a generalization of the above results we introduce some spaces. Let $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \ge 0$, $1 \le p < +\infty$, be the space of analytic functions on $\mathbb{C}_+$ satisfying

$$\|f\| := \sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{0}^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|}\,dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

A.M. Sedletskii proved (see [8]) the equality $H^p_0(\mathbb{C}_+) = H^p(\mathbb{C}_+)$. A function $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ has a.e. on $i\mathbb{R}$ angular boundary values $f(iy)$ and $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(-\infty;+\infty)$. Each $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, is a Banach space with respect to the above norm. Previous and other properties of these spaces are presented in [14]. The singular boundary function h of $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ is defined up to an additive constant and to the values in points of continuity by equality

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x\to 0+} \int_{t_1}^{t_2} \ln|G(x+iy)|dy - \int_{t_1}^{t_2} \ln|G(iy)|dy.$$

Let $E^p[D_\sigma]$ and $E^p_*[D_\sigma], 1 \le p < +\infty, \sigma > 0$, be the spaces of analytic functions f in the domains $D_\sigma = \{z : |\mathrm{Im} z| < \sigma, \mathrm{Re}\, z < 0\}$ and $D^*_\sigma = \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\sigma$ respectively, satisfying

$$\sup \left\{ \int_\gamma |f(z)|^p\,|dz| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

where the supremum is over all segments γ lying in D_σ and D^*_σ respectively. The spaces $E^p[D_\sigma]$ and $E^p_*[D_\sigma]$ have been studied in [2]. Functions f belonging to these spaces have a.e. on ∂D_σ angular boundary values $f(z)$ and $f \in L^p[\partial D_\sigma]$. The paper [2] covers the following analogue of equation (1)

$$\int_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)\,dw = 0, \quad \tau \le 0, \quad g \in E^2_*[D_\sigma]. \tag{2}$$

In [6, 9, 13] the following analogue of Theorem A is obtained.

Theorem C. *Let $g \in E^2_*[D_\sigma]$. Then the following conditions are equivalent:*

1) *equation (2) has a nontrivial solution $f \in E^2[D_\sigma]$;*

2) *G is not cyclic in $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, i.e. the system $\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ is not complete in $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, where*

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\partial D_\sigma} g(w)e^{-zw}\,dw;$$

3) *$G(z) = 0$ for some $z \in \mathbb{C}_+$ or the singular boundary function of G is not a constant or*

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{1<|t|<r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln|G(it)|\,dt - \frac{\sigma}{\pi}\ln r \right) > -\infty.$$

The aim of this article is to search an analogue of Theorem B. We denote by F_j, $j \in \{1;2;3\}$, the functions

$$F_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_j} f(w) e^{-zw}\, dw, \quad j \in \{1;2;3\},$$

where l_1, l_3, and l_2 are the legs of ∂D_σ (the rays laying under and above of the real axis, and the segment $[-i\sigma; i\sigma]$ respectively) and their orientation corresponds to the positive orientation of D_σ.

1 THE MAIN RESULT

Theorem 1. *Let $f \in E_2[D_\sigma]$ be a solution of equation (2). Then there exists the analytic in $\mathbb{C}_+$ function P_1 such that*

$$\sup\left\{ \int_0^{+\infty} \left|P_1(re^{i\varphi})\right| e^{-\sigma r|\sin\varphi|}\, dr : \varphi \in (-\pi/2;\pi/2)\backslash(-\delta;\delta) \right\} < +\infty \qquad (3)$$

for all $\delta \in (0;\pi/2)$ and the angular boundary values of the function P_1 on $i\mathbb{R}$ coincides a.e. with $G(iy)F_1(iy)e^{\sigma y}$.

Proof. Let $f \in E_2[D_\sigma]$ be a solution of equation (2) and

$$S(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+i\infty} \Phi_1(w)\frac{1}{w-z}\, dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{0} \Phi_3(w)\frac{1}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \Phi_2(w)\frac{1}{w-z}\, dw,$$

where $\Phi_j(it) = F_j(it)G(it)$, $j \in \{1,2,3\}$, $t \in \mathbb{R}$. Then the function

$$P_1(z) = e^{-i\sigma z}\begin{cases} S(z), & z \in \mathbb{C}(0;\pi/2), \\ S(z) - \Phi_2(z), & z \in \mathbb{C}(-\pi/2;0) \end{cases}$$

is required. Since the equality

$$\int_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)\, dw = \int_0^{+i\infty} \Phi_1(z)e^{\tau z}\, dz + \int_{-i\infty}^{0} \Phi_3(z)e^{\tau z}\, dz + \int_0^{+\infty} \Phi_2(z)e^{\tau z}\, dz,$$

holds (see [2]), we have

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\left(\int_0^{+i\infty} \Phi_1(z)e^{\tau z}\, dz + \int_{-i\infty}^{0} \Phi_3(z)e^{\tau z}\, dz + \int_0^{+\infty} \Phi_2(z)e^{\tau z}\, dz \right) d\tau = 0, \quad \mathrm{Re} z < 0.$$

But by Fubini's theorem for $\mathrm{Re} z < 0$ we have

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\int_0^{+\infty} \Phi_2(u)e^{\tau u}\, du\, d\tau = \int_0^{+\infty} \Phi_2(u)\, du \int_{-\infty}^{0} e^{\tau(u-z)}\, d\tau = -\int_0^{+\infty} \frac{\Phi_2(u)}{u-z}\, du.$$

Analogously,

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\int_0^{+\infty} i\Phi_1(iv)e^{\tau u}\, dv\, d\tau = -i\int_0^{+\infty} \frac{\Phi_1(iv)}{iv - z}\, dv, \quad \int_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\int_{-\infty}^{0} i\Phi_3(iv)e^{\tau u}\, dv\, d\tau = i\int_{-\infty}^{0} \frac{\Phi_3(iv)}{iv-z}\, dv.$$

Therefore

$$0 = -\int_0^{+i\infty} \Phi_1(w)\frac{1}{w-z}\, dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{0} \Phi_3(w)\frac{1}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \Phi_2(w)\frac{1}{w-z}\, dw, \quad \mathrm{Re} z < 0.$$

Then we have the for $\mathrm{Re} z > 0$

$$0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+i\infty} \Phi_1(w)\frac{1}{w+\bar z}\, dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{0} \Phi_3(w)\frac{1}{w+\bar z}\, dv - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \Phi_2(w)\frac{1}{w+\bar z}\, dw,$$

$$0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+i\infty} \Phi_1(w)\frac{1}{w+z}\, dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{0} \Phi_3(w)\frac{1}{w+z}\, dv - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \Phi_2(w)\frac{1}{w+z}\, dw.$$

As a consequence of the previous equalities we obtain for $z = x+iy$, $y \neq 0$,

$$0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+i\infty} \Phi_1(w)\left(-\frac{1}{w+\bar z} + \frac{x}{iy}\left(\frac{1}{w+\bar z} - \frac{1}{w+z}\right)\right) dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{0} \Phi_3(w)\Big(-\frac{1}{w+\bar z}$$
$$+\frac{x}{iy}\left(\frac{1}{w+z} - \frac{1}{w+\bar z}\right)\Big) dw - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \Phi_2(w)\left(-\frac{1}{w+\bar z} + \frac{x}{iy}\left(\frac{1}{w+z} - \frac{1}{w+\bar z}\right)\right) dw.$$

Hence

$$S(z) = -\int_0^{+i\infty} \Phi_1(w)K_+(w;z)\, dw + \int_{-i\infty}^{0} \Phi_3(w)K_+(w;z)\, dw - \int_0^{+\infty} \Phi_2(w)K_+(w;z)\, dw,$$

where

$$K_+(w;z) := \frac{-2}{\pi i}\frac{wx}{(w+\bar z)(w-z)(w+z)} = \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w+\bar z} + \frac{x}{iy}\left(\frac{1}{w+\bar z} - \frac{1}{w+z}\right)\right).$$

Obviously, $\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \left|K_+(it;re^{i\varphi})\right| dr = \int_0^{+\infty} \frac{|t|\, r\cos\varphi\, dr}{(t^2 - 2tr\sin\varphi + r^2)\sqrt{t^2 + 2tr\sin\varphi + r^2}}$. If $t > 0$, then

$$\int_0^{+\infty} \frac{|t|\, r\cos\varphi\, dr}{(t^2 - 2tr\sin\varphi + r^2)\sqrt{t^2 + 2tr\sin\varphi + r^2}} = \int_0^{+\infty} \frac{u\cos\varphi\, du}{(1 - 2u\sin\varphi + u^2)\sqrt{(1 + 2u\sin\varphi + u^2)}}.$$

If $\varphi \in (0;\pi/2)$, then by inequality $u < \sqrt{u^2+1}$ we have

$$\int_0^{+\infty} \frac{u\cos\varphi\, du}{(1 - 2u\sin\varphi + u^2)\sqrt{(1 + 2u\sin\varphi + u^2)}} \le \int_0^{+\infty} \frac{\cos\varphi\, du}{1 - 2u\sin\varphi + u^2} = \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\, \mathrm{tg}\, \varphi \le \pi.$$

If $\varphi \in (-\pi/2;0)$, then

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{u\cos\varphi\, du}{(1-2u\sin\varphi+u^2)\sqrt{1+2u\sin\varphi+u^2}} \le \int\limits_0^{+\infty} \frac{u\cos\varphi\, du}{(1+u^2)\sqrt{2u(1+\sin\varphi)}}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{u2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) du}{(1+u^2)\sqrt{4u\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}} \le \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) du}{1+u^2} \le \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}\, du}{1+u^2} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

If $t<0$, then analogously

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{|t|\, r\cos\varphi\, dr}{(t^2-2tr\sin\varphi+r^2)\sqrt{t^2+2tr\sin\varphi+r^2}}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{u\cos\varphi\, du}{(1+2u\sin\varphi+u^2)\sqrt{1-2u\sin\varphi+u^2}} \le \max\left\{\pi; \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}\, du}{1+u^2}\right\} \le \pi.$$

This means by Fubini's theorem that $\int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_0^{+i\infty} |\Phi_1(w)K_+(w;re^{i\varphi})|\, dw \le c < +\infty$ and $\int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_0^{+i\infty} |\Phi_3(w)K_+(w;re^{i\varphi})|\, dw \le c < +\infty$, $\varphi \in (-\pi/2;\pi/2)$. Also for $t>0$ we have

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty} \left|K_+(t;re^{i\varphi})\right| dr = \int\limits_0^{+\infty} \frac{tx}{|(t+\bar z)(t-z)(t+z)|}\, dr$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{tr\cos\varphi\, dr}{(t^2+2tr\cos\varphi+r^2)\sqrt{(t^2-2tr\cos\varphi+r^2)}} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u\cos\varphi\, dr}{(u^2+2u\cos\varphi+1)\sqrt{(u^2-2u\cos\varphi+1)}}.$$

Hence

$$\int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_0^{+\infty} \left|\Phi_2(w)K_+(w;re^{i\varphi})\right| dw \le c_1 < +\infty, \quad \varphi \in (-\pi/2+\delta;\pi/2-\delta),$$

therefore (3) is valid. Similar estimations are valid also for $\varphi \in (\pi/2;3\pi/2)$. □

2 DISCUSSION

Analogously we can prove the following result.

Theorem 2. *Let $f \in E_2[D_\sigma]$ be a solution of equation (2). Then there exists the analytic in $\mathbb{C}_+$ function P_3 such that*

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty} \left|P_3(re^{i\varphi})\right| e^{-\sigma r|\sin\varphi|} dr : \varphi \in (-\pi/2;\pi/2)\backslash(-\delta;\delta)\right\} < +\infty$$

for all $\delta \in (0;\pi/2)$ and the angular boundary values on $i\mathbb{R}$ of the function P_3 coincides a.e. with $G(iy)F_3(iy)e^{-\sigma y}$.

In [5, 1] we obtain the inverse, in some sense, result to Theorem 1.

Theorem D. *Assume $f \in E^2[D_\sigma]$. If there exists a function $\widetilde{P}_1$, $\widetilde{P}_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, such that the angular boundary values of $\widetilde{P}_1$ on $i\mathbb{R}$ coincides a.e. with $G(iy)F(iy)$, then f is a solution of equation (2).*

We do not know, whether the estimation (3) for the case $\delta = 0$ is valid, i.e. $P_1 \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

REFERENCES

[1] Vynnytskyi B., Dil'nyi V. *On necessary conditions for existence of solutions of convolution type equation.* Mat. stud. 2001, **16** (1), 61–70. (in Ukrainian)

[2] Vynnytskyi B. *On solutions of homogeneous convolution equation in one class of functions analytical in a semistrip.* Mat. stud. 1997, **7** (1), 41–52. (in Ukrainian)

[3] Gurarii V.P. Group methods of commutative harmonic analysis. In: Gamkrelidze R.V. (Ed.): Modern Problems in Mathematics. Fundamental Directions, **25**, VINITI, Moscow, 1988, 4–303. (in Russian)

[4] Gurarii V.P. *The spectral analysis of bounded functions on the half-line.* Teoriya Funktsii, Funktsional'nyi Analiz i Ego Primeneniya 1967, **5**, 210–231. (in Russian)

[5] Dilnyi V. *On solutions of homogeneous convolution equation in a Hardy-Smirnov class of functions* Mat. Stud. 2000, **14** (1), 171–174. (in Ukrainian)

[6] Dilnyi V. *On the existence of solutions of a convolution-type equation.* Reports of National Academy of Sciences of Ukraine 2008, **11**, 7–10. (in Ukrainian)

[7] Lax P., Phillips R. Scattering theory. Academic Press, New-York, London, 1976.

[8] Sedletskii A.M. *An equivalent definition of H^p spaces in the half-plane and some applications.* Math. USSR Sbornik 1975, **25** (1), 69–76. doi:SM1975v025n01ABEH002198

[9] Dilnyi V. *On Cyclic Functions in Weighted Hardy Spaces.* J. Math. Phys., Anal., Geom. 2011, **7** (1), 19–33.

[10] Koosis P. Introduction to H^p spaces. In: Cambridge Tracts in Mathematics, **115**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[11] Lax P. *Translation invariant spaces.* Acta math. 1959, **101** (3), 163–178. doi:10.1007/BF02559553

[12] Nikolski N.K. Operatos, Functions and Systems: an Easy Reading. Vol. 1–2, AMS, Providence RI, 2002.

[13] Vinnitskii B., Dil'nyi V. *A generalization of the Beurling-Lax theorem.* Math. Notes 2006, **79** (3–4), 335–341. doi:10.1007/s11006-006-0038-2

[14] Vinnitskii B. *On zeros of functions analytic in a half plane and completeness of systems of exponents.* Ukr. Math. J. 1994, **46** (5), 514–532. doi:10.1007/BF01058515

Received 06.12.2012

Revised 24.03.2013

Винницький Б.В., Дільний В.М. *Про оцінки розв'язків одного рівняння типу згортки* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — C. 30–35.

Розглядається одне рівняння типу згортки у півсмузі для функцій, що належать класу Гарді-Смірнова. Одержано оцінки розв'язків в термінах аналітичного продовження.

Ключові слова і фрази: вагові простори Гарді, рівняння згортки, зовнішня функція, циклічна функція.

Винницкий Б.В., Дильный В.М. *Об оценках решений одного уравнения типа свертки* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — C. 30–35.

Рассматривается одно уравнение типа свертки в полуполосе для функций, принадлежащих пространству Харди-Смирнова. Получено оценки решений в терминах аналитического продолжения.

Ключевые слова и фразы: весовые пространства Харди, уравнение свертки, внешняя функция, циклическая функция.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 512.53

GAVRYLKIV V.M.

SUPEREXTENSIONS OF CYCLIC SEMIGROUPS

Gavrylkiv V.M. *Superextensions of cyclic semigroups.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 36–43.

Given a cyclic semigroup S we study right and left zeros, singleton left ideals, the minimal ideal, left cancelable and right cancelable elements of superextensions $\lambda(S)$ and characterize cyclic semigroups whose superextensions are commutative.

Key words and phrases: cyclic semigroup, maximal linked system, superextensions.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: vgavrylkiv@gmail.com

INTRODUCTION

This paper is devoted to describing the structure of superextensions of cyclic semigroups. The thorough study of algebraic properties of superextensions of semigroups was started in [1, 2, 3, 4, 10], where we focused at describing of superextensions of groups, and continued in [5, 6], where we studied the structure of superextensions of semilattices and inverse semigroups.

A family $\mathcal{F}$ of nonempty subsets of a set X that is closed under taking supersets and finite intersections is called a *filter*. A filter $\mathcal{U}$ is called an *ultrafilter* if $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ for any filter $\mathcal{F}$ containing $\mathcal{U}$. A family of subsets of a set X is called a *linked system* if intersection of any two elements is nonempty. A linked system $\mathcal{M}$ is said to be a *maximal linked system* if $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ for any linked system $\mathcal{L}$ containing $\mathcal{M}$. The family $\beta(X)$ of all ultrafilters on a set X is called the *Stone-Čech compactification*, and the family $\lambda(X)$ of all maximal linked systems is well-known [11, 12] as the *superextension* of a set X.

Each map $f : X \to Y$ induces a map (see [8])

$$\lambda f : \lambda(X) \to \lambda(Y), \quad \lambda f : \mathcal{M} \longmapsto \langle f(M) \subset Y : M \in \mathcal{M} \rangle.$$

Here for a family $\mathcal{B}$ of nonempty subsets of a set Y by $\langle B \subset Y : B \in \mathcal{B} \rangle$ we denote the family $\langle B \subset Y : B \in \mathcal{B} \rangle = \{A \subset Y : \exists B \in \mathcal{B}\ (B \subset A)\}$. An ultrafilter $\langle \{x\} \rangle$, generated by a singleton $\{x\}$, $x \in X$, is called *principal*. We consider $X \subset \beta(X) \subset \lambda(X)$ if each point $x \in X$ is identified with the principal ultrafilter $\langle \{x\} \rangle$ generated by the singleton $\{x\}$.

It was shown in [9] that any associative binary operation $* : S \times S \to S$ can be extended to an associative binary operation $\circ : \lambda(S) \times \lambda(S) \to \lambda(S)$ by the formula

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = \langle \bigcup_{a \in L} a * M_a : L \in \mathcal{L},\ \{M_a\}_{a \in L} \subset \mathcal{M} \rangle$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 20M10, 20M14, 20M17, 20M18, 54B20.

for maximal linked systems $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in \lambda(S)$. In this case the Stone-Čech compactification $\beta(S)$ is a subsemigroup of the superextension $\lambda(S)$.

A nonempty subset I of a semigroup $(S, *)$ is called *an ideal* (resp. a *right ideal*, a *left ideal*) if $I * S \cup S * I \subset I$ (resp. $I * S \subset I$, $S * I \subset I$). An element z of a semigroup $(S, *)$ is called a *zero* (resp. a *left zero*, a *right zero*) in S if $a * z = z * a = z$ (resp. $z * a = z$, $a * z = z$) for any $a \in S$. It is clear that $z \in S$ is a zero (resp. a left zero, a right zero) in S if and only if the singleton $\{z\}$ is an ideal (resp. a right ideal, a left ideal) in S. An ideal $I \subset S$ is called *minimal* if any ideal of S that lies in I coincides with I. By analogy we define minimal left and minimal right ideals of S. The union $K(S)$ of all minimal left (right) ideals of S coincides with the minimal ideal of S, see [11, theorem 2.8]. A semigroup $(S, *)$ is said to be a *right zeros semigroup* if $a * b = b$ for any $a, b \in S$. A map $\varphi : S \to T$ between semigroups $(S, *)$ and $(T, \circ)$ is called a *homomorphism* if $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ for any $a, b \in S$. A homomorphism $\varphi : S \to I$ from a semigroup S into an ideal $I \subset S$ is called a *retraction* if $\varphi(a) = a$ for any element $a \in I$. An element a of a semigroup S is called *left cancelable* (resp. *right cancelable*) if for any points $x, y \in S$ the equation $ax = ay$ (resp. $xa = ya$) implies $x = y$. This is equivalent to saying that the left (resp. right) shift $l_a : S \to S$, $l_a : x \mapsto a * x$, (resp. $r_a : S \to S$, $r_a : x \mapsto x * a$) is injective. A semigroup S is called *left (right) cancellative* if all elements of S are left (right) cancelable. A semigroup that is both left and right cancellative is said to be *cancellative*.

A semigroup $\langle a \rangle = \{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ generated by a single element a is called *cyclic*. If a cyclic semigroup is infinite, then it is isomorphic to the additive semigroup $\mathbb{N}$. A finite cyclic semigroup $S = \langle a \rangle$ also has very simple structure (see [7]). There are positive integer numbers r and m called the *index* and the *period* of S such that: (i) $S = \{a, a^2, \ldots, a^{m+r-1}\}$ and $m + r - 1 = |S|$; (ii) for any $i, j \in \omega$ the equality $a^{r+i} = a^{r+j}$ holds if and only if $i \equiv j \mod m$; (iii) $C_m = \{a^r, a^{r+1}, \ldots, a^{m+r-1}\}$ is the minimal ideal, a cyclic and maximal subgroup of S with the neutral element $e = a^n \in C_m$, where m divides n.

From now on we denote by $C_{r,m}$ a finite cyclic semigroup of index r and period m, and maximal subgroup of $C_{r,m}$ is denoted by C_m.

1 HOMOMORPHISMS, RIGHT, LEFT ZEROS AND MINIMAL (LEFT) IDEALS

Proposition 1.1. *For any homomorphism $\varphi : S \to T$ between semigroups $(S, *_1)$ and $(T, *_2)$ the induced map $\lambda\varphi : \lambda(S) \to \lambda(T)$ is a homomorphism of the semigroups $(\lambda(S), \circ_1)$ and $(\lambda(T), \circ_2)$.*

Proof. Given two maximal linked systems $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in \lambda(S)$ observe that

$$\begin{aligned}
\lambda\varphi(\mathcal{L} \circ_1 \mathcal{M}) &= \lambda\varphi(\langle \bigcup_{x \in L} x *_1 M_x : L \in \mathcal{L},\ \{M_x\}_{x \in L} \subset \mathcal{M} \rangle) \\
&= \langle \varphi(\bigcup_{x \in L} x *_1 M_x) : L \in \mathcal{L},\ \{M_x\}_{x \in L} \subset \mathcal{M} \rangle \\
&= \langle \bigcup_{x \in L} \varphi(x) *_2 \varphi(M_x) : L \in \mathcal{L},\ \{M_x\}_{x \in L} \subset \mathcal{M} \rangle \\
&= \langle \bigcup_{x \in \varphi(L)} x *_2 \varphi(M_x) : L \in \mathcal{L},\ \{\varphi(M_x)\}_{x \in \varphi(L)} \subset \lambda\varphi(\mathcal{M}) \rangle \\
&= \langle \varphi(L) : L \in \mathcal{L} \rangle \circ_2 \langle \varphi(M) : M \in \mathcal{M} \rangle = \lambda\varphi(\mathcal{L}) \circ_2 \lambda\varphi(\mathcal{M}).
\end{aligned}$$

□

Let us note that for a subsemigroup T of a semigroup S the homomorphism $i:\lambda(T)\to\lambda(S)$, $i:\mathcal{A}\to\langle\mathcal{A}\rangle_S$ is injective, and thus we can identify the semigroup $\lambda(T)$ with the subsemigroup $i(\lambda(T))\subset\lambda(S)$.

Lemma 1.1. *Let I be an ideal of a semigroup S. If a map $\varphi:S\to I$ is a retraction, then the map $\lambda\varphi:\lambda(S)\to\lambda(I)$ is a retraction too.*

Proof. Indeed, let $\mathcal{A}\in\lambda(I)$, $\mathcal{M}\in\lambda(S)$, then $\mathcal{A}\circ\mathcal{M}=\langle\bigcup_{a\in A}a*M_a: A\in\mathcal{A}, A\subset I, \{M_a\}_{a\in A}\subset\mathcal{M}\rangle=\langle\bigcup_{a\in A}a*M_a: A\in\mathcal{A},\{M_a\}_{a\in A}\subset\mathcal{M},\bigcup_{a\in A}a*M_a\subset I\rangle\in\lambda(I)$. By analogy $\mathcal{M}\circ\mathcal{A}\in\lambda(I)$, and therefore $\lambda(I)$ is an ideal of the semigroup $\lambda(S)$. If $\mathcal{A}\in\lambda(I)$, then $\lambda\varphi(\mathcal{A})=\langle\varphi(A): A\subset I, A\in\mathcal{A}\rangle=\langle A\subset I: A\in\mathcal{A}\rangle=\{A\subset I: A\in\mathcal{A}\}=\mathcal{A}$ and hence $\lambda\varphi$ is a retraction. □

Lemma 1.2. *Let I be an ideal of a semigroup S and a map $\varphi:S\to I$ is a retraction. The semigroup S has a right (left) zero if and only if the semigroup I has a right (left) zero, and all right and left zeros of the semigroup S are contained in I.*

Proof. Let z be a right (left) zero of the semigroup S, that is $sz=z$ ($zs=z$) for any $s\in S$. Since φ is a homomorphism, $\varphi(s)\varphi(z)=\varphi(z)$ ($\varphi(z)\varphi(s)=\varphi(z)$). Specifically for any $s\in I$ the equality $\varphi(s)=s$ holds, and then $s\varphi(z)=\varphi(s)\varphi(z)=\varphi(z)$ ($\varphi(z)s=\varphi(z)\varphi(s)=\varphi(z)$). Consequently, $\varphi(z)$ is a right (left) zero of the semigroup I.

Let $z\in I$ be a right (left) zero of the semigroup I. Since I is an ideal, then for any $s\in S$ we have that $sz, zs\in I$, and hence $sz=\varphi(sz)=\varphi(s)\varphi(z)=\varphi(s)z=z$ ($zs=\varphi(zs)=\varphi(z)\varphi(s)=z\varphi(s)=z$). Consequently, z is a right (left) zero of the semigroup S.

If z is a right (left) zero of the semigroup S, then $z=sz\in I$ ($z=zs\in I$), where $s\in I$. Therefore, all right (left) zeros of the semigroup S are contained in I. □

Let e be the neutral element of the maximal subgroup C_m of a cyclic semigroup $C_{r,m}$.

Lemma 1.3. *The map $\varphi:C_{r,m}\to C_m$, $\varphi(x)=ex$ is a retraction and $\varphi(x)y=xy$ for any $x\in C_{r,m}$ and $y\in C_m$.*

Proof. Since the semigroup C_m is an ideal of the semigroup $C_{r,m}$, $\varphi(x)=ex\in C_m$. Consequently, $\varphi(xy)=exy=eexy=exey=\varphi(x)\varphi(y)$ for any $x,y\in C_{r,m}$ and $\varphi(x)=ex=x$ for $x\in C_m$. Hence the map $\varphi:C_{r,m}\to C_m$ is a retraction. Further for any $x\in C_{r,m}$ and $y\in C_m$ we have that $xy\in C_m$, and therefore $\varphi(xy)=xy$. On the other hand, $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(x)y$, since $y\in C_m$. □

Combining Lemmas 1.1–1.3 we get

Proposition 1.2. *The semigroup $\lambda(C_{r,m})$ contains a right (left) zero if and only if its subgroup $\lambda(C_m)$ contains a right (left) zero. Each right (left) zero of $\lambda(C_{r,m})$ belongs to $\lambda(C_m)$.*

It was proved in [1] that the semigroup $\lambda(G)$ possesses a right zero if and only if the group G is periodic and each element of G has odd order. Since each element of a finite group G has odd order if and only if the group G has odd order, Proposition 1.2 implies the following characterization of superextensions of finite cyclic semigroups that have right zeros.

Theorem 1. *The superextension $\lambda(C_{r,m})$ of a finite cyclic semigroup $C_{r,m}$ has a right zero if and only if the period m of the cyclic semigroup $C_{r,m}$ is an odd number.*

Proposition 1.3. *The superextension of the infinite cyclic semigroup has neither right nor left zeros.*

Proof. Let $\langle a\rangle=\{a,a^2,\dots,a^n\dots\}$ be the infinite cyclic semigroup and $\mathcal{M}\in\lambda(\langle a\rangle)$. First observe that if $\langle a\rangle=A\cup B$ is any partition of the set $\langle a\rangle$, then either $A\in\mathcal{M}$ or $B\in\mathcal{M}$. Indeed, if $A\notin\mathcal{M}$, then $M\cap B\neq\varnothing$ for any $M\in\mathcal{M}$, and thus the maximality of $\mathcal{M}$ implies that $B\in\mathcal{M}$. Consider the partition $\langle a\rangle=A\cup B$, where $A=\{a,a^3,\dots,a^{2k-1},\dots\}$, $B=\{a^2,a^4,\dots,a^{2k},\dots\}$. Assume that a maximal linked system $\mathcal{M}$ is a right (left) zero of the semigroup $\langle a\rangle$. Then for any $x\in\langle a\rangle$ we have $\langle\{x\}\rangle\circ\mathcal{M}=\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}\circ\langle\{x\}\rangle=\mathcal{M}$), and therefore $xM\in\mathcal{M}$ ($Mx\in\mathcal{M}$) for any $M\in\mathcal{M}$. If $A\in\mathcal{M}$, then $B=aA=Aa\in\mathcal{M}$, that is impossible, since $A\cap B=\varnothing$. By analogy, if $B\in\mathcal{M}$, then $A\supset aB=Ba\in\mathcal{M}$. This contradiction implies that the superextension of the infinite cyclic semigroup contains neither right nor left zeros. □

It was proved in [1] that for the semigroup $\lambda(G)$ has a (left) zero if and only if a group G is of order $|G|\in\{1,3,5\}$.

Consequently, Proposition 1.2 implies the following characterization of superextensions of finite cyclic semigroups that have (left) zeros.

Theorem 2. *The superextension $\lambda(C_{r,m})$ of a cyclic semigroup $C_{r,m}$ has a (left) zero if and only if $m\in\{1,3,5\}$.*

Now we shall characterize cyclic semigroups whose superextensions have one-point minimal left ideals.

If $C_{r,m}$ is a finite cyclic semigroup of odd period m and C_m is the maximal subgroup of $C_{r,m}$, then the superextension $\lambda(C_{r,m})$ contains a right zero, in particular the maximal linked system

$$\mathcal{L}=\langle A\subset C_m: |A|>m/2\rangle$$

is a right zero of the semigroup $\lambda(C_{r,m})$. A maximal linked system $\mathcal{Z}\in\lambda(C_{r,m})$ is a right zero of the semigroup $\lambda(C_{r,m})$ if and only if the one-point set $\{\mathcal{Z}\}$ is a minimal left ideal of $\lambda(C_{r,m})$. Taking into account that all minimal left ideals are isomorphic and the union $K(\lambda(C_{r,m}))$ of all minimal left ideals in $\lambda(C_{r,m})$ coincides with the minimal ideal of $\lambda(C_{r,m})$ (see [11, Theorem 2.8]), Theorem 1 and Proposition 1.3 imply the following theorem.

Theorem 3. *A finite cyclic semigroup $C_{r,m}$ has odd period m if and only if all minimal left ideals of the semigroup $\lambda(C_{r,m})$ are singletons. In this case the minimal ideal $K(\lambda(C_{r,m}))$ of the semigroup $\lambda(C_{r,m})$ is the subsemigroup of right zeros of $\lambda(C_{r,m})$. The infinite cyclic semigroup has no one-point minimal left (right) ideals.*

2 Commutativity of superextensions of cyclic semigroups

Theorem 4. *A finite cyclic semigroup $C_{r,m}=\{a,a^2,\dots,a^r,\dots,a^{m+r-1}|a^{r+m}=a^r\}$ of order $m+r-1$ has commutative superextension if and only if*

$$(r,m)\in\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,1)\}.$$

The superextension of the infinite cyclic semigroup is not commutative.

Proof. It was proved in the paper [1] that the superextension of a group G is commutative if and only if $|G| \leq 4$. Since for $m > 4$ the superextension $\lambda(C_{r,m})$ contains a noncommutative subsemigroup $\lambda(C_m)$, $\lambda(C_{r,m})$ is not commutative. So it is sufficient to consider only cyclic semigroups of period $m \leq 4$.

If index $r = 1$, then $C_{r,m}$ is a cyclic group of order m, and thus for $r = 1$ the semigroup $\lambda(C_{r,m})$ is commutative if and only if $m \leq 4$.

If $|C_{r,m}| \in \{1,2\}$, then the superextension $\lambda(C_{r,m})$ is isomorphic to the semigroup $C_{r,m}$, and $\lambda(C_{r,m})$ is commutative. In the case $|C_{r,m}| = 3$ the superextension $\lambda(C_{r,m})$ contains only one maximal linked system, which is not a principal ultrafilter. Since all principal ultrafilters commute with maximal linked systems, the superextension $\lambda(C_{r,m})$ is commutative.

It follows that for

$$(r,m) \in \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1)\}$$

the superextension $\lambda(C_{r,m})$ is commutative.

If $r = 2$, $m \in \{3,4\}$, then the product xy of any two elements $x, y \in C_{r,m}$ is contained in the maximal subgroup C_m, and thus $xy = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, where $\varphi : C_{r,m} \to C_m$ is the retraction $\varphi : s \to es$. Since superextensions of groups of order 3 and 4 are commutative, $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \lambda\varphi(\mathcal{A}) \circ \lambda\varphi(\mathcal{B}) = \lambda\varphi(\mathcal{B}) \circ \lambda\varphi(\mathcal{A}) = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ for any $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \lambda(C_{r,m})$. Consequently, the semigroups $\lambda(C_{2,3})$ and $\lambda(C_{2,4})$ are commutative.

Let $r = 3$. The case $m = 1$ was considered before.

For the semigroup $C_{3,2} = \{a, a^2, a^3, a^4 | a^5 = a^3\}$ the semigroup $\lambda(C_{3,2})$ contains 12 elements:

$$\mathcal{U}_k = \langle\{a^k\}\rangle, \quad \Delta_k = \langle A \subset C_{3,2} : |A| = 2,\ a^k \notin A\rangle$$

and

$$\square_k = \langle C_{3,2} \setminus \{a^k\}, A : A \subset C_{3,2},\ |A| = 2,\ a^k \in A\rangle, \text{ where } k \in \{1,2,3,4\}.$$

The following table implies the commutativity of $\lambda(C_{3,2})$:

$\circ$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	$\square_1$	$\square_2$	$\square_3$	$\square_4$
Δ_1	$\mathcal{U}_4$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$
Δ_2	$\mathcal{U}_3$	Δ_1	$\mathcal{U}_3$	Δ_1	Δ_1	$\mathcal{U}_3$	Δ_1	$\mathcal{U}_3$
Δ_3	$\mathcal{U}_4$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$
Δ_4	$\mathcal{U}_3$	Δ_1	$\mathcal{U}_3$	Δ_1	Δ_1	$\mathcal{U}_3$	Δ_1	$\mathcal{U}_3$
$\square_1$	$\mathcal{U}_3$	Δ_1	$\mathcal{U}_3$	Δ_1	Δ_1	$\mathcal{U}_3$	Δ_1	$\mathcal{U}_3$
$\square_2$	$\mathcal{U}_4$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$
$\square_3$	$\mathcal{U}_3$	Δ_1	$\mathcal{U}_3$	Δ_1	Δ_1	$\mathcal{U}_3$	Δ_1	$\mathcal{U}_3$
$\square_4$	$\mathcal{U}_4$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$

If $m \in \{3,4\}$, then $C_{3,m} = \{a, a^2, \ldots, a^{m+2} | a^{m+3} = a^3\}$. Consider maximal linked systems $\mathcal{A} = \langle\{a,a^2\},\{a,a^3\},\{a^2,a^3\}\rangle$ and $\mathcal{B} = \langle\{a,a^2\},\{a,a^{m+1}\},\{a^2,a^{m+1}\}\rangle$. Observe that $\{a^2,a^3\} = a\{a,a^2\} \cup a^2\{a,a^{m+1}\} \in \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, but $\{a^2,a^3\} \notin \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$. Therefore, $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ and the semigroup $C_{3,m}$ is not commutative.

Let $r \geq 4$. First consider the case of the semigroup $C_{4,1} = \{a, a^2, a^3, a^4 | a^5 = a^4\}$. Each maximal linked system different from the principal ultrafilter $\langle\{a\}\rangle$ contains the set $\{a^2, a^3, a^4\}$. Since $\{a^2,a^3,a^4\}\{a^2,a^3,a^4\} = \{a^4\}$, the product of such maximal linked systems is the principal ultrafilter $\langle\{a^4\}\rangle$. The fact that the principal ultrafilter $\langle\{a\}\rangle$ commutes with all maximal linked systems implies the commutativity of the semigroup $\lambda(C_{4,1})$.

Put $\mathcal{A} = \langle\{a,a^2\},\{a,a^3\},\{a^2,a^3\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle\{a,a^2\},\{a,a^{m+r-2}\},\{a^2,a^{m+r-2}\}\rangle$. We have that $\{a^3,a^4\} = a\{a^2,a^3\} \cup a^2\{a,a^2\} \in \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$, but $\{a^3,a^4\} \notin \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, since the equality $a^{m+r+1} = a^4$ holds only if $r = 4$ and $m = 1$, which we considered before. Consequently, $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ and a semigroup $\lambda(C_{r,m})$ for $(r,m) \neq (4,1)$ is not commutative.

Let $\langle a\rangle = \{a, \ldots, a^n, \ldots\}$ be the infinite cyclic semigroup. Put $\mathcal{A} = \langle\{a,a^2\},\{a,a^3\},\{a^2,a^3\}\rangle$, $\mathcal{B} = \langle\{a,a^2\},\{a,a^4\},\{a^2,a^4\}\rangle$. Let us observe that $\{a^3,a^4\} = a\{a^2,a^3\} \cup a^2\{a,a^2\} \in \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$, but $\{a^3,a^4\} \notin \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. Therefore, $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ and the semigroup $\lambda(\langle a\rangle)$ is not commutative. □

3 RIGHT (LEFT) CANCELABLE ELEMENTS

In this section we shall detect right (left) cancelable elements of superextensions of cyclic semigroups.

Proposition 3.1. *The superextension $\lambda(C_{r,m})$ has (left, right) cancelable elements if and only if index r of a cyclic semigroup $C_{r,m}$ is equal to 1.*

Proof. Let $r > 1$ and a be the generator of a semigroup $C_{r,m}$. Consider the map $\varphi : C_{r,m} \to C_m$, $\varphi : x \to ex$, where e is the neutral element of the cyclic group C_m. According to Lemma 1.3 this map is a retraction. Since $a^{r-1}x \in C_m = \{a^r, \ldots a^{r+m-1}\}$ for any $x \in C_{r,m}$, $a^{r-1}x = \varphi(a^{r-1}x) = \varphi(a^{r-1})\varphi(x)$. On the other hand, since C_m is an ideal of $C_{r,m}$, $\varphi(a^{r-1})x \in C_m$ and $\varphi(a^{r-1})x = \varphi(\varphi(a^{r-1})x) = \varphi(\varphi(a^{r-1}))\varphi(x) = \varphi(a^{r-1})\varphi(x)$. Consequently, $\varphi(a^{r-1})x = a^{r-1}x$ for any $x \in C_{r,m}$.

Let $\mathcal{M}$ be a maximal linked system on a semigroup $C_{r,m}$. Then we obtain $\langle\{a^{r-1}\}\rangle \circ \mathcal{M} = \langle \bigcup_{a\in\{a^{r-1}\}} a * M_a : \ \{M_a\}_{a\in L} \subset \mathcal{M}\rangle = \langle a^{r-1}M : M \in \mathcal{M}\rangle = \langle \varphi(a^{r-1})M : M \in \mathcal{M}\rangle = \langle\{\varphi(a^{r-1})\}\rangle \circ \mathcal{M}$ and $\mathcal{M} \circ \langle\{a^{r-1}\}\rangle = \langle \bigcup_{a\in M} a * \{a^{r-1}\} : \ M \in \mathcal{M}\rangle = \langle Ma^{r-1} : M \in \mathcal{M}\rangle = \langle M\varphi(a^{r-1}) : M \in \mathcal{M}\rangle = \mathcal{M} \circ \langle\{\varphi(a^{r-1})\}\rangle$. Since $a^{r-1} \neq \varphi(a^{r-1})$, the maximal linked system $\mathcal{M}$ is neither left nor right cancelable.

If $r = 1$, then a cyclic semigroup $C_{1,m} = C_m$ is a group. Let e be the neutral element of the group C_m. Then $\langle\{e\}\rangle \circ \mathcal{M} = \mathcal{M} = \mathcal{M} \circ \langle\{e\}\rangle$ for any $\mathcal{M} \in \lambda(C_m)$, and equalities $\mathcal{X} \circ \langle\{e\}\rangle = \mathcal{Y} \circ \langle\{e\}\rangle$, $\langle\{e\}\rangle \circ \mathcal{X} = \langle\{e\}\rangle \circ \mathcal{Y}$ imply that $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. Consequently, the principal ultrafilter $\langle\{e\}\rangle$ is a cancelable element of the semigroup $\lambda(C_{1,m})$. □

If G is a group, then the formula

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = \langle \bigcup_{a\in L} a * M_a : L \in \mathcal{L},\ \{M_a\}_{a\in L} \subset \mathcal{M}\rangle$$

implies that the product $\mathcal{L} \circ \mathcal{M}$ of any two maximal linked systems $\mathcal{L}$ and $\mathcal{M}$ is a principal ultrafilter if and only if both $\mathcal{L}$ and $\mathcal{M}$ are principal ultrafilters. Therefore, we deduce the following proposition.

Proposition 3.2. *For a group G the set $\lambda(G) \setminus \{\langle\{g\}\rangle : g \in G\}$ is an ideal in $\lambda(G)$.*

Lemma 3.1. *A semigroup S is a left (right) cancellative semigroup if and only if all principal ultrafilters are left (right) cancelable elements in the superextension $\lambda(S)$.*

Proof. If an element $a \in S$ is not left (right) cancelable in the semigroup S, then it is clear that the principal ultrafilter generated by the element a is not cancelable in $\lambda(S)$.

Let S be a left (right) cancellative semigroup, $a \in S$ and $\mathcal{X},\mathcal{Y} \in \lambda(S)$, $\mathcal{X} \neq \mathcal{Y}$, then $X \cap Y = \varnothing$ for some $X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}$. Since each element of S is left (right) cancelable, then $aX \cap aY = \varnothing$ ($Xa \cap Ya = \varnothing$), and thus $\langle\{a\}\rangle \circ \mathcal{X} \neq \langle\{a\}\rangle \circ \mathcal{Y}$ ($\mathcal{X} \circ \langle\{a\}\rangle \neq \mathcal{Y} \circ \langle\{a\}\rangle$). Consequently, the left $l_{\langle\{a\}\rangle}$ (right $r_{\langle\{a\}\rangle}$) shift is injective and the principal ultrafilter $\langle\{a\}\rangle$ is left (right) cancelable. □

Proposition 3.3. *An element $\mathcal{M} \in \lambda(C_{1,m})$ is left (right) cancelable if and only if $\mathcal{M}$ is a principal ultrafilter.*

Proof. Since in any group, in particular in the cyclic group $C_{1,m}$, all elements are cancelable, according to Lemma 3.1 all principal ultrafilters are right cancelable in the superextension $\lambda(C_{1,m})$.

Assume that some maximal linked system $\mathcal{M} \in \lambda(C_{1,m}) \setminus \{\langle\{g\}\rangle : g \in C_{1,m}\}$ is left cancelable. This means that the left shift $l_{\mathcal{M}} : \lambda(C_{1,m}) \to \lambda(C_{1,m})$, $l_{\mathcal{M}} : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{M} \circ \mathcal{A}$, is injective. According to Proposition 3.2, the set $\lambda(C_{1,m}) \setminus \{\langle\{g\}\rangle : g \in C_{1,m}\}$ is an ideal in $\lambda(C_{1,m})$. Consequently, $l_{\mathcal{M}}(\lambda(C_{1,m})) = \mathcal{M} \circ \lambda(C_{1,m}) \subset \lambda(C_{1,m}) \setminus \{\langle\{g\}\rangle : g \in C_{1,m}\}$. Since $\lambda(C_{1,m})$ is finite, $l_{\mathcal{M}}$ cannot be injective.

For the right cancelable elements the proof is analogous. □

Since the infinite cyclic semigroup is a cancellative semigroup, then Lemma 3.1 implies the following proposition.

Proposition 3.4. *All principal ultrafilters are cancelable elements in the superextension of the infinite cyclic semigroup.*

Proposition 3.5. *Let S be the infinite cyclic semigroup and $\mathcal{L} \in \lambda(S)$. A maximal linked system $\mathcal{L}$ is right cancelable in $\lambda(S)$ provided for every $s \in S$ there is a set $L_s \in \mathcal{L}$ such that the family $\{s * L_s : s \in S\}$ is disjoint.*

Proof. Assume that $\{L_s\}_{s\in S} \subset \mathcal{L}$ is a family such that $\{s * L_s : s \in S\}$ is disjoint. To prove that $\mathcal{L}$ is right cancelable, take two maximal linked systems $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \lambda(S)$ with $\mathcal{A} \circ \mathcal{L} = \mathcal{B} \circ \mathcal{L}$. It is sufficient to show that $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Take any set $A \in \mathcal{A}$ and observe that the set $\bigcup_{a\in A} a * L_a$ belongs to $\mathcal{A} \circ \mathcal{L} = \mathcal{B} \circ \mathcal{L}$. Consequently, there is a set $B \in \mathcal{B}$ and a family of sets $\{M_b\}_{b\in B} \subset \mathcal{L}$ such that

$$\bigcup_{b\in B} b * M_b \subset \bigcup_{a\in A} a * L_a.$$

It follows from $L_b \in \mathcal{L}$ that $M_b \cap L_b$ is not empty for every $b \in B$.

Since the sets $a * L_a$ i $b * L_b$ are disjoint for different $a, b \in S$, the inclusion

$$\bigcup_{b\in B} b * (M_b \cap L_b) \subset \bigcup_{b\in B} b * M_b \subset \bigcup_{a\in A} a * L_a$$

implies $B \subset A$ and hence $A \in \mathcal{B}$. □

REFERENCES

[1] Banakh T., Gavrylkiv V., Nykyforchyn O. *Algebra in superextensions of groups, I: zeros and commutativity*. Algebra Discrete Math. 2008, **3**, 1–29.

[2] Banakh T., Gavrylkiv V. *Algebra in superextension of groups, II: cancelativity and centers*. Algebra Discrete Math. 2008, **4**, 1–14.

[3] Banakh T., Gavrylkiv V. *Algebra in superextension of groups: minimal left ideals*. Mat. Stud. 2009, **31**, 142–148.

[4] Banakh T., Gavrylkiv V. *Algebra in the superextensions of twinic groups*. Diss. Math. 2010, **473**, 1–74.

[5] Banakh T., Gavrylkiv V. *Algebra in superextensions of semilattices*. Algebra Discrete Math. 2012, **13** (1), 26–42.

[6] Banakh T., Gavrylkiv V. *Algebra in superextensions of inverse semigroups*. Algebra Discrete Math. 2012, **13** (2), 147–168.

[7] Clifford A.H., Preston G.B. The algebraic theory of semigroups. Vol. I. Mathematical Surveys, **7**. AMS, Providence RI, 1961.

[8] Gavrylkiv V. *The spaces of inclusion hyperspaces over noncompact spaces*. Mat. Stud. 2007, **28** (1), 92–110.

[9] Gavrylkiv V. *Right-topological semigroup operations on inclusion hyperspaces*. Mat. Stud. 2008, **29** (1), 18–34.

[10] Gavrylkiv V. *On representation of semigroups of inclusion hyperspaces*. Carpathian Math. Publ. 2010, **2** (1), 24–34.

[11] Hindman N., Strauss D. Algebra in the Stone-Čech compactification. de Gruyter, Berlin, New York, 1998.

[12] Verbeek A. Superextensions of topological spaces. MC Tract 41, Amsterdam, 1972.

Received 5.12.2012

Гаврилків В.М. *Суперрозширення циклічних напівгруп* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 36–43.

У статті вивчаються праві і ліві нулі, одноточкові ліві ідеали, мінімальний ідеал, скоротні зліва і скоротні справа елементи суперрозширення $\lambda(S)$ циклічної напівгрупи S, а також характеризуються циклічні напівгрупи, суперрозширення яких є комутативними.

Ключові слова і фрази: циклічна напівгрупа, максимальна зчеплена система, суперрозширення.

Гаврилкив В.М. *Суперрасширения циклических полугрупп* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 36–43.

В работе изучаются правые и левые нули, одноточечные левые идеалы, минимальный идеал, сократимые слева и сократимые справа элементы суперрасширения $\lambda(S)$ циклической полугруппы S, а также характеризуются циклические полугруппы, суперрасширения которых коммутативны.

Ключевые слова и фразы: циклическая полугруппа, максимальная сцепленная система, суперрасширение.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 515.12+512.58

HETMAN I.

THE COMPLETENESS OF A NORMED SPACE IS EQUIVALENT TO THE HOMOGENEITY OF ITS SPACE OF CLOSED BOUNDED CONVEX SETS

Hetman I. *The completeness of a normed space is equivalent to the homogeneity of its space of closed bounded convex sets.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 44–46.

We prove that an infinite-dimensional normed space X is complete if and only if the space $\mathrm{BConv}_H(X)$ of all non-empty bounded closed convex subsets of X is topologically homogeneous.

Key words and phrases: completeness, normed spaces, topological homogeneity, closed convex sets.

Ivan Franko National University, Lviv, Ukraine
E-mail: ihromant@gmail.com

INTRODUCTION

In this paper we shall prove that the completeness of an infinite-dimensional normed space X is equivalent to the topological homogeneity of its hyperspace $\mathrm{BConv}_H(X)$ of all non-empty bounded closed convex sets. The space $\mathrm{BConv}_H(X)$ is endowed with the Hausdorff metric

$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|,\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\},\quad A,B\in \mathrm{BConv}_H(X).$$

Due to results of [5], [6], [2], the topological structure of the hyperspace $\mathrm{BConv}_H(X)$ is well-understood for each Banach space X. To formulate a classification result for the hyperspace $\mathrm{BConv}_H(X)$ we need to recall some notations.

All linear spaces considered in this paper are over the field of real numbers $\mathbb{R}$. For a linear topological space X its dimension $\dim(X)$ is defined as the smallest cardinality $|B|$ of a subset $B\subset X$ having dense linear hull in X. For a cardinal κ by $l_2(\kappa)=\{x\in\mathbb{R}^\kappa\colon \sum_{\alpha\in\kappa}|x(\alpha)|^2<\infty\}$ we denote the Hilbert space having an orthonormal base of cardinality κ. By ω we denote the smallest infinite cardinal. By $\mathbb{R}_+$ and $\mathbb{I}$ we denote the closed half-line $[0,\infty)$ and the closed unit interval $[0,1]$, respectively.

The following classification theorem can be derived from [5], [6], [2].

Theorem 1. *For each Banach space X the hyperspace $\mathrm{BConv}_H(X)$ is homeomorphic to:*

1) $\{0\}$ *iff* $\dim(X)=0$;

2) $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ *iff* $\dim(X)=1$;

3) $\mathbb{I}^\omega\times\mathbb{R}_+$ *iff* $1<\dim(X)<\omega$;

4) $l_2(2^{\dim(X)})$ *iff* $\dim(X)\geq\omega$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

In this paper we shall study the hyperspace $\mathrm{BConv}_H(X)$ for non-complete normed spaces X. In this case we shall show that $\mathrm{BConv}_H(X)$ has rather bad topological properties. In particular, it is neither topologically homogeneous nor even weakly homogeneous.

1 MAIN RESULT

A topological space X is defined to be

- *topologically homogeneous* if for any two points $x,y\in X$ there is a homeomorphism $h: X\to X$ such that $h(x)=y$;
- *weakly homogeneous* if for each non-empty open dense subset $U\subset X$ and each point $x\in X$ there is a homeomorphism $h: X\to X$ such that $h(x)\in U$.

It is clear that each topologically homogeneous space is weakly homogeneous.

The main result of this note is the following theorem.

Theorem 2. *For an infinite-dimensional normed space X the following conditions are equivalent:*

(1) X is complete;

(2) $\mathrm{BConv}_H(X)$ is topologically homogeneous;

(3) $\mathrm{BConv}_H(X)$ is weakly homogeneous;

(4) $\mathrm{BConv}_H(X)$ is homeomorphic to $l_2(2^{\dim(X)})$.

Proof. We shall prove the following implications. (1)⇒(4)⇒(2)⇒(3)⇒(1). The implication (1)⇒(4) follows from Theorem 1 while (4) ⇒ (2) ⇒ (3) are trivial. So, it remains to prove (3) ⇒ (1).

In the space $\mathrm{BConv}_H(X)$ consider the open dense subspace

$$\mathrm{BCb}_H(X)=\{A\in\mathrm{BConv}_H(X): Int(A)\neq\varnothing\}$$

consisting of bounded convex bodies (i.e., bounded convex sets with non-empty interior). Let $\bar X$ be the completion of the normed space X and $\mathrm{BCb}_H(\bar X)$ be the space of bounded convex bodies in the Banach space $\bar X$. Observe that the map

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{cl}: & \mathrm{BCb}_H(X) & \longrightarrow & \mathrm{BCb}_H(\bar X),\\ & B & \longmapsto & \bar B,\end{array}$$

is an isometric bijection. The space $\mathrm{BCb}_H(\bar X)$, being open in the complete metric space $\mathrm{BConv}_H(\bar X)$, is Čech-complete and so is its isometric copy $\mathrm{BCb}_H(X)$. Assuming that the space $\mathrm{BConv}_H(X)$ is weakly homogeneous, and taking into account that $\mathrm{BCb}_H(X)$ is an open dense Čech-complete subspace of $\mathrm{BConv}_H(X)$, we conclude that each point of the space $\mathrm{BConv}_H(X)$ has an open Čech-complete neighborhood. By a result of Arhangelski [1] and Frolik [4] (see also [3, 5.5.8(c)]), the space $\mathrm{BConv}_H(X)$, being locally Čech-complete and paracompact, is Čech-complete, and so is its closed subspace X. Being Čech-complete, the space X is a G_δ-set in its completion $\bar X$. Assuming that $X\neq\bar X$, we can find a point $x\in\bar X\setminus X$ and conclude that X and $X+x$ are two disjoint dense G_δ-subsets of Banach space $\bar X$, which is impossible according to the Baire Theorem. Consequently, $X=\bar X$ is a Banach space. □

2 ACKNOWLEDGEMENT

The author would like to express his thanks to Ostap Chervak and Taras Banakh for fruitful ideas and interesting discussion about this paper.

REFERENCES

[1] Arhangel'skii A.V. *On topological spaces which are complete in the sense of Čech.* Vestnik Moskov. Univ. Ser. I. Mat. Meh. 1961, **2**, 37–40. (in Russian)

[2] Banakh T., Hetman I., Sakai K. *Recognizing the topology of the space of closed convex subsets of a Banach space.* Preprint (`http://arxiv.org/abs/1112.6374`).

[3] Engelking R. General topology. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] Frolík Z. *Locally complete topological spaces.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 1961, **137**, 790–792 (in Russian); English translation: Soviet Math. Dokl. 1961, **2**, 355–357.

[5] Nadler S., Quinn J., Stavrakas N.M. *Hyperspaces of compact convex sets.* Pacific J. Math. 1979, **83**, 441–462.

[6] Sakai K. *The spaces of compact convex sets and bounded closed convex sets in a Banach space.* Houston J. Math. 2008, **34** (1), 289–300.

Received 26.12.2012

Гетьман I. *Еквівалентність повноти нормованого простору гомогенності гіперпростору його замкнених обмежених опуклих множин* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 44–46.

Ми доводимо, що нескінченновимірний нормований простір X є повним тоді і лише тоді, коли гіперпростір $\mathrm{BConv}_H(X)$ усіх непорожніх замкнених опуклих підмножин простору X є топологічно гомогенним.

Ключові слова і фрази: повнота, нормовані простори, топологічна гомогенність, замкнені опуклі множини.

Гетьман И. *Эквивалентность полноты нормированного пространства гомогенности гиперпространства его замкнутых выпуклых множеств* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 44–46.

Мы доказываем, что бесконечномерное нормированное пространство X полно тогда и только тогда, когда гиперпространство $\mathrm{BConv}_H(X)$, состоящее из всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств пространства X, топологически гомогенно.

Ключевые слова и фразы: полнота, нормированные пространства, топологическая гомогенность, замкнутые выпуклые множества.

ISSN 2075-9827 `http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp`
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.98

HOLUBCHAK O.M.[1], ZAGORODNYUK A.V.[2]

ON BIDUAL BASES IN THE SPACE OF SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS ON ℓ_1

Holubchak O.M., Zagorodnyuk A.V. *On bidual bases in the space of symmetric analytic functions on ℓ_1.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 47–49.

We consider a special Hilbert space of symmetric analytic functions on ℓ_1 and construct a pair of bidual bases of polynomials.

Key words and phrases: Hilbert space, symmetric analytic functions, bidual bases.

[1] Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv, Ukraine.
[2] Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: `andriyzag@yahoo.com` (Zagorodnyuk A.V.)

1 INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

A function f from complex ℓ_1 to $\mathbb{C}$ is said to be *symmetric* if

$$f(\sigma(x)) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, \dots) = f(x), \qquad x \in \ell_1,$$

for every permutation σ of positive integers $\mathbb{N}$.

The algebra of all continuous symmetric polynomials on ℓ_1 will be denoted by $P_s(\ell_1)$. Symmetric polynomials and analytic functions were investigated in [1, 2, 3, 4]. In particular, it is known that $P_s(\ell_1)$ admits algebraic bases. We need to use several standard bases which also are well known in the combinatorics.

The basis of power sums consists of polynomials

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_1$$

(see [3] for details). The elementary symmetric polynomials $G_n(x) = \sum x_{i_1} \dots x_{i_n}$ form an another basis in $P_s(\ell_1)$ and due to the Newton equality

$$nG_n = G_{n-1}P_1 - G_{n-2}P_2 + \dots + (-1)^n P_n.$$

Also, there is a basis of complex symmetric functions H_n which can be defined by

$$nH_n = H_{n-1}P_1 + H_{n-2}P_2 + \dots + H_1 P_{n-1} + P_n.$$

Let $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ be a partition of a positive integer n, that is all $\lambda_k \in \mathbb{N}$ and

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46J15, 46J20, 46E15.

We denote by M_λ the symmetric polynomial in $P_s(\ell_1)$

$$M_\lambda(x) = \sum_{\sigma \in S} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n},$$

where S is the group of permutations of $\mathbb{N}$. It is known from the combinatorics (see [5]) that

$$H_n = \sum_{|\lambda|=n} M_\lambda.$$

For a given partition λ let $z_\lambda = \prod_{k \geq 1} k^{m_k} m_k!$, where m_k is the number of entries of k into λ. It is known that

$$H_n = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda = \sum_{\nu_1+2\nu_2+\dots+n\nu_n=n} \frac{1}{\nu_1! 1^{\nu_1} \dots \nu_n! n^{\nu_n}} P_1^{\nu_1} \dots P_n^{\nu_n}, \tag{1}$$

where $P_\lambda = P_{\lambda_1} \dots P_{\lambda_n}$. We will use also notations $G_\lambda = G_{\lambda_1} \dots G_{\lambda_n}$, $H_\lambda = G_{\lambda_1} \dots G_{\lambda_n}$. It is easy to see that each of system $\{P_\lambda\}$, $\{G_\lambda\}$, $\{H_\lambda\}$, and $\{M_\lambda\}$ form a linear basis in $P_s(\ell_1)$, where λ goes over all partitions of all positive integers.

Next we introduce an inner product on $P_s(\ell_1)$ so that $\{P_\lambda\}$ form an orthogonal basis. In this paper we consider the case when $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda$, where $\delta_{\lambda\mu}$ is the Kronecker delta. Let $H_s = H_s^{z_\lambda}(\ell_1)$ be the completion of $P_s(\ell_1)$ with respect to the inner product. In the paper we will show that $\{H_\lambda\}$ and $\{M_\lambda\}$ are bidual bases in H_s.

2 Main results

Let $x \Diamond y$, $x, y \in \ell_1$ be an element in ℓ_1 with coordinates $(x_i y_j)_{i,j=1}^{\infty}$ ordered by a fixed way. It is easy to see, that $P_\lambda(x \Diamond y) = P_\lambda(x) P_\lambda(y)$ and

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x \Diamond y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \prod_j \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x) y_j^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} H_\lambda(x) M_\lambda(y), \tag{2}$$

where $H_0 = 1$, $M_0 = 1$.

Theorem 1. *$\langle H_\lambda, M_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ for all partitions μ and λ.*

Proof. By (1) and (2)

$$\sum_{|\lambda|=n} H_\lambda(x) M_\lambda(y) = H_n(x \Diamond y) = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda(x \Diamond y) = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda(x) P_\lambda(y).$$

So

$$\Big\langle \sum_{|\lambda|=n} H_\lambda(\cdot) M_\lambda(y), M_\mu(\cdot) \Big\rangle = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda(y) \langle P_\lambda, M_\mu \rangle.$$

On the other hand, since $\frac{P_\lambda}{\sqrt{z_\lambda}}$ is an orthonormal basis,

$$M_\mu = \sum_\lambda \Big\langle \frac{P_\lambda}{\sqrt{z_\lambda}}, M_\mu \Big\rangle \frac{P_\lambda}{\sqrt{z_\lambda}} = \sum_{|\lambda|=|\mu|=n} \Big\langle \frac{P_\lambda}{\sqrt{z_\lambda}}, M_\mu \Big\rangle \frac{P_\lambda}{\sqrt{z_\lambda}}$$

and if y is such that R_y is continuous, then $R_y(M_\mu) = M_\mu(y) = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda(y) \langle P_\lambda, M_\mu \rangle$. So

$$\Big\langle \sum_{|\lambda|=n} H_\lambda(\cdot) M_\lambda(y), M_\mu(\cdot) \Big\rangle = \sum_{|\lambda|=n} M_\lambda(y) \langle H_\lambda, M_\mu \rangle = M_\mu(y).$$

Since it is true for all y such that R_y is continuous, and since functionals R_y separate vectors in H_s we have that

$$\langle H_\lambda, M_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

□

Let us make some computations. Taking into account that $\sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} = 1$ (see [6, p. 49]) we have

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n \rangle = \Big\langle \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda, \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} P_\lambda \Big\rangle = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-2} \|P_\lambda\|^2 = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{-1} = 1.$$

Since $M_n = P_n$, $\|M_n\| = \sqrt{z_n} = \sqrt{n}$ and $\sup_\lambda \|M_\lambda\| \|H_\lambda\| = \infty$. So $\{H_\lambda\}$ does not form a Riesz basis.

References

[1] Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p*. Bull. Lond. Math. Soc. 2003, **35**, 55–64. doi: 10.1112/S0024609302001431

[2] Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 2012, **55**, 125–142. doi: 10.1017/S0013091509001655

[3] Gonzalez M., Gonzalo R., Jaramillo J. *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces*. J. London Math. Soc. 1999, **59**, 681–697. doi: 10.1112/S0024610799007164

[4] Holubchak O.M. *Hilbert spaces of symmetric analytic functions on ℓ_1*. Carpathian Math. Publ. 2011, **3** (1), 34–39. (in Ukrainian)

[5] MacDonald I.G. Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society. Providence, Island, 1997.

[6] Sachkov V.N. An Introduction to Combinatorial Methods of Discrete Mathematical. Nauka, Moskow, 1982. (in Russian)

Received 12.02.2013

Голубчак О.М., Загороднюк А.В. *Двоїсті базиси в просторі симетричних аналітичних функцій на ℓ_1* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — C. 47–49.

Розглянуто спеціальний гільбертів простір симетричних аналітичних функцій на ℓ_1 і побудовано пару двоїстих базисів цього простору, які складаються з симетричних поліномів.

Ключові слова і фрази: гільбертів простір, симетричні аналітичні функції, дуальний базис.

Голубчак О.М., Загороднюк А.В. *Дуальные базисы в пространстве симметрических аналитических функций на ℓ_1* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — C. 47–49.

Рассмотрено специальное гильбертово пространство симметрических аналитических функций на ℓ_1 и построено пару дуальных базисов этого пространства, состоящих из симметрических полиномов.

Ключевые слова и фразы: гильбертово пространство, симметрические аналитические функции, дуальный базис.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.53

Захарко Ю.Б.[1], Філевич П.В.[2]

Зростання канонічних добутків Вейєрштрасса нульового роду з випадковими нулями

Захарко Ю.Б., Філевич П.В. *Зростання канонічних добутків Вейєрштрасса нульового роду з випадковими нулями* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 50–58.

Нехай $\zeta=(\zeta_n)$ — комплексна послідовність нульового роду з показником збіжності τ, $N(r)$ — її усереднена лічильна функція, $\pi(z)=\prod(1-\frac{z}{\zeta_n})$ — канонічний добуток Вейєрштрасса, а $M(r)$ — максимум модуля цього добутку. Відомо, що тоді виконується нерівність Валунда-Валірона

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N(r)}{\ln M(r)}\ge w(\tau),\qquad w(\tau):=\frac{\sin\pi\tau}{\pi\tau},$$

і ця нерівність є точною. В роботі доведено, що для більшості (у ймовірнісному сенсі) послідовностей ζ сталу $w(\tau)$ в нерівності Валунда-Валірона можна замінити сталою $w\left(\frac{\tau}{2}\right)$.

Ключові слова і фрази: ціла функція, добуток Вейєрштрасса, максимум модуля, порядок, рід, показник збіжності, усереднена лічильна функція.

[1] Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій ім. С. З. Гжицького, Львів, Україна
[2] Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна
E-mail: yulia.zaharko@gmail.com (Захарко Ю.Б.), filevych@mail.ru (Філевич П.В.)

1 Вступ

Нехай $\mathbb{N}_0$ — множина невід'ємних цілих чисел, $\mathcal{Z}$ — клас комплексних послідовностей $\zeta=(\zeta_n)$ таких, що $0<|\zeta_0|\le|\zeta_1|\le\ldots$ і $\zeta_n\to\infty$, $n\to\infty$, а $\mathcal{E}$ — клас трансцендентних цілих функцій. Для послідовності $\zeta\in\mathcal{Z}$ і числа $\tau\in[0;1]$ покладемо

$$C_\zeta=\left\{\alpha\in[0;+\infty):\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|\zeta_n|^\alpha}=+\infty\right\},\quad w(\tau)=\frac{\sin\pi\tau}{\pi\tau},$$

(вважаємо, що $w(0)=1$).

Як звично (див. [4]), показник збіжності, рід, лічильну функцію і усереднену лічильну функцію послідовності $\zeta\in\mathcal{Z}$ визначаємо відповідно за рівностями

$$\tau_\zeta=\sup C_\zeta,\qquad q_\zeta=\sup(C_\zeta\cap\mathbb{N}_0),\qquad n_\zeta(r)=\sum_{|\zeta_n|\le r}1,\qquad N_\zeta(r)=\int_0^r n_\zeta(t)\frac{dt}{t}.$$

Підклас послідовностей $\zeta\in\mathcal{Z}$ нульового роду ($q_\zeta=0$) позначимо через $\mathcal{Z}_0$. Добре відомо, що якщо $\zeta\in\mathcal{Z}_0$, то канонічний добуток Вейєрштрасса

$$\pi(z)=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\zeta_n}\right)\tag{1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D15, 30D20.

збігається абсолютно і рівномірно в кожному скінченному крузі, а тому задає цілу функцію $\pi\in\mathcal{E}$.

Для функції $f\in\mathcal{E}$ нехай $n_f(r,0)$ — лічильна функція нулів (кількість нулів у крузі $\{z\in\mathbb{C}:|z|\le r\}$). Усереднену лічильну функцію нулів, максимум модуля і порядок функції f визначаємо відповідно за рівностями

$$N_f(r,0)=\int_0^r(n_f(t,0)-n_f(0,0))\frac{dt}{t}+n_f(0,0)\ln r,$$
$$M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\},\qquad \rho_f=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Використовуючи формулу Йєнсена (див. [4], с. 24])

$$N_f(r,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|d\theta-\ln|c_f(0)|,$$

де $c_f(0)$ — перший відмінний від нуля коефіцієнт з розкладу функції f у ряд Тейлора в околі точки $z=0$, легко отримуємо нерівність

$$N_f(r,0)\le\ln M_f(r)-\ln|c_f(0)|.\tag{2}$$

З іншого боку, правильна така класична теорема Валунда–Валірона (див. [7], [4, с. 571]).

Теорема 1. *Нехай $f\in\mathcal{E}$ — ціла функція порядку $\rho\in[0;1]$. Тоді*

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N_f(r,0)}{\ln M_f(r)}\ge w(\rho).\tag{3}$$

Зауважимо, що з (2) і (3) для функції $f\in\mathcal{E}$ нульового порядку маємо рівність

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N_f(r,0)}{\ln M_f(r)}=1.$$

Якщо ж $\rho_f=1$, то нерівність (3) тривіальна ($w(1)=0$) і перетворюється у рівність, наприклад, для функції $f(z)=e^z$, яка не має нулів ($N_f(r,0)=0$).

У випадку $\rho_f<1$ функція $f\in\mathcal{E}$ має нульовий рід, тобто послідовність ζ усіх відмінних від 0 нулів цієї функції, занумерованих з урахуванням кратностей у порядку неспадання їх модулів, є нульового роду і

$$f(z)=c_f(0)z^{n_f(0,0)}\pi(z),\tag{4}$$

де π — канонічний добуток Вейєрштрасса вигляду (1), побудований за послідовністю ζ (див. [4, с. 80]). Використовуючи зображення (4), очевидні співвідношення

$$M_f(r)=|c_f(0)|r^{n_f(0,0)}M_\pi(r),\quad n_f(r,0)=n_\zeta(r)+n_f(0,0),\quad N_f(r,0)=N_\zeta(r)+n_f(0,0)\ln r,$$

а також відомі факти теорії розподілу значень (див. теореми 1.8 і 3.4 з [4, гл. II]), для кожної функції $f\in\mathcal{E}$ нульового роду легко отримуємо рівності $\rho_f=\rho_\pi=\tau_\zeta$. З огляду на це, теорема 1 для таких функцій є рівносильною наступній.

Теорема 2. *Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ — послідовність з показником збіжності $\tau \in [0;1]$. Тоді для канонічного добутку Вейєрштрасса* (1) *правильна нерівність*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r)}{\ln M_\pi(r)} \geq w(\tau). \tag{5}$$

Нерівність (5) є точною, що випливає з такої теореми.

Теорема 3. *Нехай $\tau \in [0;1]$. Тоді існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ з $\tau_\zeta = \tau$ така, що для канонічного добутку Вейєрштрасса* (1) *правильна рівність*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r)}{\ln M_\pi(r)} = w(\tau).$$

Теорема 3 є також добре відомою [7]. Її доведення легко отримати, використовуючи міркування з [4, с. 74, 554–555]. Зауважимо, що з теореми 3 випливає точність нерівності (3) у випадку довільного $\rho \in [0;1]$.

У даній роботі покажемо, що у випадку $\tau \in (0;1]$ для більшості (у ймовірнісному сенсі) послідовностей $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ оцінку (5) можна істотно уточнити, тобто послідовностей, існування яких стверджується теоремою 3, є (у цьому ж сенсі) мало. Власне, далі розглядатимемо канонічні добутки Вейєрштрасса, побудовані за послідовностями випадкових величин, тобто канонічні добутки з випадковими нулями. Зазначимо, що деякі інші властивості цілих функцій з випадковими нулями розглядались у нашій роботі [8].

2 Формулювання основних результатів

Позначимо через Ξ клас послідовностей $\xi = (\xi_n(\omega))$ незалежних випадкових величин (взагалі кажучи, комплекснозначних), визначених на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, таких, що для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ маємо $\mathrm{M}\xi_n(\omega) = 0$ і майже напевно (м. н.) $|\xi_n(\omega)| = 1$ (тут M — знак математичного сподівання). До класу Ξ належать, наприклад, довільна послідовність Радемахера $(\varepsilon_n(\omega))$, тобто послідовність незалежних випадкових величин, що приймають значення -1 і 1 з ймовірністю $\frac{1}{2}$ кожне, а також довільна послідовність вигляду $(e^{2\pi i\omega_n(\omega)})$, де $(\omega_n(\omega))$ — послідовність Штейнгауза, тобто послідовність незалежних рівномірно розподілених на відрізку $[0;1]$ випадкових величин (див. [5]).

Нехай $\xi \in \Xi$, $\zeta \in \mathcal{Z}_0$, $\zeta_\omega = (\xi_n(\omega)\zeta_n)$. Зрозуміло, що тоді м. н. $n_{\zeta_\omega}(r) = n_\zeta(r)$, $N_{\zeta_\omega}(r) = N_\zeta(r)$ для всіх $r \geq 0$, $\tau_{\zeta_\omega} = \tau_\zeta$ і $\zeta_\omega \in \mathcal{Z}_0$. Поряд з канонічним добутком Вейєрштрасса (1) розглянемо випадковий канонічний добуток Вейєрштрасса

$$\pi_\omega(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\xi_n(\omega)\zeta_n}\right). \tag{6}$$

Правильна наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай $\xi \in \Xi$, а $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ — послідовність з показником збіжності $\tau \in [0;1]$. Тоді для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса* (6) *м. н. правильна нерівність*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r)}{\ln M_{\pi_\omega}(r)} \geq w\left(\frac{\tau}{2}\right). \tag{7}$$

Нерівність (7) у випадку, якщо $\xi_n(\omega) = \varepsilon_n(\omega)$, $n \in \mathbb{N}_0$, є точною, що випливає з такої теореми.

Теорема 5. *Нехай ξ — послідовність Радемахера, $\tau \in [0;1]$. Тоді існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ з $\tau_\zeta = \tau$ така, що для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса* (6) *м. н. правильна рівність*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r)}{\ln M_{\pi_\omega}(r)} = w\left(\frac{\tau}{2}\right). \tag{8}$$

Для доведення теорем 4 і 5 нам будуть потрібні деякі допоміжні результати, які наведено в наступних двох пунктах.

3 Допоміжні результати

Нехай $\rho \in [0;+\infty)$. Уточненим ρ-порядком називатимемо довільну невід'ємну неперервно диференційовну на $[0;+\infty)$ функцію $\rho(r)$, для якої $\rho(r) \to \rho$ і $\rho'(r)r\ln r \to 0$, якщо $r \to +\infty$.

Правильні наступні дві леми (див. [4, с. 70-72, 555]).

Лема 3.1. *Нехай $\lambda(r)$ — додатна неспадна необмежена на $[r_0, +\infty)$ функція така, що*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\lambda(r)}{\ln r} = \rho \in [0;+\infty).$$

Тоді існує уточнений ρ-порядок $\rho(r)$, для якого

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\lambda(r)}{r^{\rho(r)}} = 1.$$

Лема 3.2. *Нехай $\rho \in (0;1)$, $r_0 \in (0;+\infty)$ — фіксоване число, а $\rho(r)$ — довільний уточнений ρ-порядок. Тоді*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{r_0/r}^{+\infty} \frac{(rt)^{\rho(rt)}}{r^{\rho(r)}} \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{w(\rho)}.$$

Для послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ введемо позначення

$$G_\zeta(r) = \left(\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{|\zeta_n|^2}\right)\right)^{1/2}.$$

Лема 3.3. *Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}_0$. Тоді*

$$\ln G_\zeta(r) = \int_0^{+\infty} N_\zeta(r\sqrt{t}) \frac{dt}{(1+t)^2}.$$

Доведення. Наведена рівність тривіальна при $r = 0$.

Нехай $r > 0$. Оскільки для кожної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ виконуються (див. [4, с. 79]) рівності

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{n_\zeta(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{N_\zeta(x)}{x} = 0$$

і $n_\zeta(x) = N_\zeta(x) = 0$ для $x \in [0; |\zeta_0|)$, то, переходячи до інтегралу Стілтьєса, двічі інтегруючи частинами і роблячи заміну $x = r\sqrt{t}$, маємо

$$\ln G_\zeta(r) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r^2}{|\zeta_n|^2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{r^2}{x^2}\right) dn_\zeta(x)$$
$$= \frac{1}{2} n_\zeta(x) \ln\left(1 + \frac{r^2}{x^2}\right)\Big|_0^{+\infty} + r^2 \int_0^{+\infty} \frac{n_\zeta(x)}{x}\frac{dx}{r^2+x^2} = r^2 \int_0^{+\infty} (N_\zeta(x))'_+ \frac{dx}{r^2+x^2}$$
$$= r^2 \int_0^{+\infty} \frac{dN_\zeta(x)}{r^2+x^2} = r^2 \frac{N_\zeta(x)}{r^2+x^2}\Big|_0^{+\infty} + r^2 \int_0^{+\infty} N_\zeta(x)\frac{2x\,dx}{(r^2+x^2)^2} = \int_0^{+\infty} N_\zeta(r\sqrt{t})\frac{dt}{(1+t)^2}.$$

Лему 3.3 доведено. □

Для цілої функції $f \in \mathcal{E}$ її середнє $S_f(r)$ визначимо за рівністю

$$S_f(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta\right)^{1/2}.$$

Лема 3.4. *Нехай $f \in \mathcal{E}$ — ціла функція скінченного порядку. Тоді*

$$\ln M_f(r) \sim \ln S_f(r), \qquad r \to +\infty. \tag{9}$$

Співвідношення (9) у випадку $\rho_f < +\infty$ випливає з добре відомого (див., наприклад, [6, с. 17]) співвідношення Бореля

$$\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r), \qquad r \to +\infty, \tag{10}$$

де $\mu_f(r) = \max\left\{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| r^n : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ — максимальний член степеневого розвинення функції f в околі точки $z = 0$, а також з нерівностей $\mu_f(r) \le S_f(r) \le M_f(r)$, друга з яких — очевидна, а першу легко отримати, врахувавши рівність Парсеваля

$$S_f^2(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|^2 r^{2n}.$$

Зауважимо, що необхідні і достатні умови виконання співвідношення (10) і його узагальнень отримано відповідно в [1, 3]. Необхідні і достатні умови виконання співвідношення (9) і його узагальнень знайдено в [2].

4 Оцінка середнього випадкового добутку Вейєрштрасса

Наступну теорему, в якій наведено оцінку зверху для середнього випадкового добутку Вейєрштрасса (6) через функцію $G_\zeta(r)$, використаємо при доведенні теореми 4.

Теорема 6. *Нехай $\xi \in \Xi$, $\zeta \in \mathcal{Z}_0$, а $\varphi(x)$ — додатна неспадна на $[x_0; +\infty)$ функція така, що $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\varphi(x)} < +\infty$. Тоді для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса (6) м. н. правильна нерівність*

$$S_{\pi_\omega}(r) < G_\zeta(r)\sqrt{\varphi(\ln G_\zeta(r))}, \quad r \ge r_0(\omega).$$

Доведення. Насамперед зауважимо, що для довільної випадкової величини η такої, що $\mathrm{M}\eta = 0$, маємо також рівність $\mathrm{M}\overline{\eta} = 0$. Крім того, якщо $|\eta| = 1$ м. н., то $\frac{1}{\eta} = \overline{\eta}$ м. н.

Зафіксуємо довільне $r \in (0, +\infty)$ і розглянемо випадкову величину $X(\omega) = S_{\pi_\omega}^2(r)$. Скориставшись теоремою Фубіні і незалежністю випадкових величин $\xi_n(\omega)$, отримуємо

$$\mathrm{M}X(\omega) = \mathrm{M}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\pi_\omega(re^{i\theta})|^2 d\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{M}|\pi_\omega(re^{i\theta})|^2 d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{M}\prod_{n=0}^{\infty}\left|1 - \frac{re^{i\theta}}{\xi_n(\omega)\zeta_n}\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\prod_{n=0}^{\infty}\mathrm{M}\left|1 - \frac{re^{i\theta}}{\xi_n(\omega)\zeta_n}\right|^2 d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\prod_{n=0}^{\infty}\mathrm{M}\left(1 + \frac{r^2}{|\zeta_n|^2} - \frac{re^{i\theta}}{\zeta_n}\overline{\xi_n(\omega)} - \frac{re^{-i\theta}}{\overline{\zeta_n}}\xi_n(\omega)\right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{r^2}{|\zeta_n|^2}\right) d\theta = G_\zeta^2(r).$$

Оскільки випадкова величина $X(\omega)$ невід'ємна, то, використовуючи нерівність Чебишова, маємо

$$P(S_{\pi_\omega}(r) \ge \sqrt{\lambda} G_\zeta(r)) = P(X(\omega) \ge \lambda \mathrm{M}X(\omega)) \le \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda > 0. \tag{11}$$

Зауважимо, що функція $G_\zeta(r)$ є зростаючою до $+\infty$ на $[0; +\infty)$ і $G_\zeta(0) = 1$. Тому для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ рівняння $\ln G_\zeta(r) = n$ має на $[0; +\infty)$ єдиний розв'язок. Позначимо цей розв'язок через r_n.

Покладемо $\psi(x) = \frac{1}{e^2}\varphi(x-1)$, $x \ge x_0 + 1$. Тоді $\psi(x)$ є додатною неспадною на $[x_0 + 1; +\infty)$ функцією, причому

$$\int_{x_0+1}^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty. \tag{12}$$

Розглянемо події

$$A_n = \left\{\omega \in \Omega : S_{\pi_\omega}(r_n) \ge G_\zeta(r_n)\sqrt{\psi(\ln G_\zeta(r_n))}\right\}, \qquad n \ge x_0 + 1.$$

Застосовуючи (11) з $r = r_n$ і $\lambda = \psi(\ln G_\zeta(r_n)) = \psi(n)$, отримуємо $P(A_n) < \frac{1}{\psi(n)}$, а тому, з огляду на (12),

$$\sum_{n \ge x_0+1} P(A_n) < +\infty.$$

Тоді за лемою Бореля–Кантеллі м. н. виконується лише скінченне число подій A_n, $n \ge x_0 + 1$. Отже, м. н.

$$S_{\pi_\omega}(r_n) < G_\zeta(r_n)\sqrt{\psi(\ln G_\zeta(r_n))}, \qquad n \ge n_0(\omega). \tag{13}$$

Зафіксуємо довільне $\omega \in \Omega$, для якого виконується (13), і нехай $r \in [r_n, r_{n+1})$, де $n \ge n_0(\omega)$. Скориставшись (13), маємо

$$S_{\pi_\omega}(r) < S_{\pi_\omega}(r_{n+1}) < G_\zeta(r_{n+1})\sqrt{\psi(\ln G_\zeta(r_{n+1}))} = eG_\zeta(r_n)\sqrt{\psi(\ln G_\zeta(r_n) + 1)}$$
$$\le eG_\zeta(r)\sqrt{\psi(\ln G_\zeta(r) + 1)} = G_\zeta(r)\sqrt{\varphi(\ln G_\zeta(r))},$$

що й потрібно було довести. □

Вибираючи $\varphi(x) = x^2$, $x \ge 1$, з теореми 6 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 4.1. *Нехай $\xi \in \Xi$, а $\zeta \in \mathcal{Z}_0$. Тоді для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса* (6) *м. н.*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln S_{\pi_\omega}(r)}{\ln G_\zeta(r)} \le 1.$$

Нехай $\xi \in \Xi$, а $\varphi(x)$ — довільна додатна неспадна на $[x_0;+\infty)$ функція. Тоді з кожної зростаючої до $+\infty$ послідовності (r_n) можна виділити підпослідовність (r_{n_k}) таку, що

$$\sum_{k\ge x_0} \frac{1}{\varphi^2(\ln G_\zeta(r_{n_k}))} < +\infty.$$

Застосовуючи (11) з $r = r_{n_k}$ і $\lambda = \varphi^2(\ln G_\zeta(r_{n_k}))$, а також лему Бореля-Кантеллі, легко отримати наступне твердження, яке в певній частині уточнює теорему 6.

Теорема 7. *Нехай $\xi \in \Xi$, $\zeta \in \mathcal{Z}_0$, (r_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність, а $\varphi(x)$ — додатна неспадна на $[x_0;+\infty)$ функція. Тоді існує підпослідовність (r_{n_k}) така, що для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса* (6) *м. н. правильна нерівність*

$$S_{\pi_\omega}(r_{n_k}) < G_\zeta(r_{n_k})\varphi(\ln G_\zeta(r_{n_k})), \qquad k \ge k_0(\omega).$$

5 Доведення теорем 4 і 5

Доведення теореми 4. Нехай $\xi \in \Xi$, а $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ — послідовність з показником збіжності $\tau \in (0;1]$ (у випадку $\tau = 0$ теорема 4 випливає з теореми 2). Доведемо, що м. н. виконується нерівність (7). Для цього, з огляду на лему 3.4 і наслідок 4.1, досить довести нерівність

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r)}{\ln G_\zeta(r)} \ge w\left(\frac{\tau}{2}\right). \tag{14}$$

Використовуючи теореми 1.8 і 3.4 з [4, гл. II], маємо

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln N_\zeta(r)}{\ln r} = \tau.$$

Тому за лемою 3.1 існує уточнений τ-порядок $\tau(r)$ такий, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r)}{r^{\tau(r)}} = 1. \tag{15}$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді з (15) випливає, що $N_\zeta(r) \le (1+\varepsilon) r^{\tau(r)}$ для всіх $r \ge r_0$, де $r_0 = r_0(\varepsilon) > 0$ — деяке фіксоване число. Використовуючи леми 3.3 та 3.2 і враховуючи, що функція $\rho(r) = \frac{1}{2}\tau(\sqrt{r})$ є уточненим $\frac{\tau}{2}$-порядком, отримуємо

$$\begin{aligned}
\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln G_\zeta(r)}{r^{\tau(r)}} &= \varlimsup_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{r^{\tau(r)}} \int_0^{+\infty} N_\zeta(r\sqrt{t}) \frac{dt}{(1+t)^2} \right) \\
&\le \varlimsup_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{r^{\tau(r)}} \int_0^{r_0^2/r^2} N_\zeta(r\sqrt{t}) \frac{dt}{(1+t)^2} \right) + \varlimsup_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{r^{\tau(r)}} \int_{r_0^2/r^2}^{+\infty} N_\zeta(r\sqrt{t}) \frac{dt}{(1+t)^2} \right) \\
&\le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r_0)}{r^{\tau(r)}} \frac{r_0^2}{r_0^2 + r^2} + (1+\varepsilon) \varlimsup_{r\to+\infty} \int_{r_0^2/r^2}^{+\infty} \frac{(r\sqrt{t})^{\tau(r\sqrt{t})}}{r^{\tau(r)}} \frac{dt}{(1+t)^2} \\
&= (1+\varepsilon) \varlimsup_{r\to+\infty} \int_{r_0^2/r^2}^{+\infty} \frac{(r^2 t)^{\rho(r^2 t)}}{(r^2)^{\rho(r^2)}} \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1+\varepsilon}{w(\tau/2)}.
\end{aligned}$$

З довільності $\varepsilon > 0$ випливає, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln G_\zeta(r)}{r^{\tau(r)}} \le \frac{1}{w(\tau/2)}. \tag{16}$$

Нарешті з (16) і (15) маємо (14). Теорему 4 доведено. □

Доведення теореми 5. Насамперед доведемо наступне твердження: *якщо послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ така, що $\arg\zeta_0 = \arg\zeta_1 = \ldots$, а ξ — довільна послідовність дійсних випадкових величин таких, що $|\xi_n(\omega)| = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ м. н., то для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса* (6) *м. н. $M_{\pi_\omega}(r) \ge G_\zeta(r)$ для всіх $r \ge 0$.*

Справді, прийнявши $\alpha = \arg\zeta_0$, за вказаних умов на послідовності ζ і ξ м. н. маємо

$$M_{\pi_\omega}(r) \ge \left|\pi_\omega(re^{i\alpha})\right| = \left| \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{ri}{\xi_n(\omega)|\zeta_n|}\right) \right| = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{|\zeta_n|^2}\right)^{1/2} = G_\zeta(r).$$

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 5. Нехай ξ — послідовність Радемахера, $\tau \in [0;1]$. Доведемо, що існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ з $\tau_\zeta = \tau$ така, що для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса (6) м. н. правильна рівність (8). Розглядатимемо лише нетривіальний випадок $\tau \in (0;1]$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ нехай $\zeta_n = (n+1)^{1/\tau}$ у випадку $\tau \in (0;1)$ і $\zeta_n = (n+1)\ln^2(n+2)$ у випадку $\tau = 1$. Легко перевірити, що в кожному випадку для послідовності $\zeta = (\zeta_n)$ маємо $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ і $\tau_\zeta = \tau$. Крім того,

$$n_\zeta(r) \sim \begin{cases} r^\tau, & \text{якщо } \tau \in (0;1); \\ r/\ln^2 r, & \text{якщо } \tau = 1 \end{cases}$$

при $r \to +\infty$. Звідси за правилом Лопіталя при $r \to +\infty$ отримуємо

$$N_\zeta(r) \sim \begin{cases} r^\tau/\tau, & \text{якщо } \tau \in (0;1); \\ r/\ln^2 r, & \text{якщо } \tau = 1, \end{cases}$$

а тому, як легко переконатись, існує уточнений τ-порядок $\tau(r)$ такий, що $N_\zeta(r) \sim r^{\tau(r)}$, $r \to +\infty$.

Доведемо, що

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln G_\zeta(r)}{N_\zeta(r)} \ge \frac{1}{w(\tau/2)}, \tag{17}$$

звідки, з огляду на те, що м. н. $M_{\pi_\omega}(r) \ge G_\zeta(r)$, і на вже доведену теорему 4, випливатиме м. н. (8).

Зафіксуємо довільне $\varepsilon \in (0;\tau)$ і нехай $r_0 > 0$ — довільне фіксоване число таке, що $N_\zeta(r) \ge (1-\varepsilon) r^{\tau(r)}$ для всіх $r \ge r_0$. Використовуючи леми 3.3 та 3.2 і враховуючи, що функція $\rho(r) = \frac{1}{2}\tau(\sqrt{r})$ є уточненим $\frac{\tau}{2}$-порядком, отримуємо

$$\begin{aligned}
\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln G_\zeta(r)}{N_\zeta(r)} &= \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln G_\zeta(r)}{r^{\tau(r)}} = \varliminf_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{r^{\tau(r)}} \int_0^{+\infty} N_\zeta(r\sqrt{t}) \frac{dt}{(1+t)^2} \right) \\
&\ge \varliminf_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{r^{\tau(r)}} \int_{r_0^2/r^2}^{+\infty} N_\zeta(r\sqrt{t}) \frac{dt}{(1+t)^2} \right) \ge (1-\varepsilon) \varliminf_{r\to+\infty} \int_{r_0^2/r^2}^{+\infty} \frac{(r\sqrt{t})^{\tau(r\sqrt{t})}}{r^{\tau(r)}} \frac{dt}{(1+t)^2} \\
&= (1-\varepsilon) \varliminf_{r\to+\infty} \int_{r_0^2/r^2}^{+\infty} \frac{(r^2 t)^{\rho(r^2 t)}}{(r^2)^{\rho(r^2)}} \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1-\varepsilon}{w(\tau/2)}.
\end{aligned}$$

З довільності $\varepsilon \in (0;\tau)$ випливає (17). Теорему 5 доведено. □

REFERENCES

[1] Filevych P.V. *Asymptotic behavior of entire functions with exceptional values in the Borel relation.* Ukrainian Math. J. 2001, **53** (4), 522–530.

[2] Filevych P.V. *Asymptotic relations between the means of Dirichlet series and their application.* Mat. Stud. 2003, **19** (2), 127–140.

[3] Filevych P.V. *On the growth of the maximum modulus of an entire function depending on the growth of its central index.* Ufa Math. J. 2011, **3** (1), 92–100.

[4] Goldberg A.A., Ostrovskii I.V. The distribution of values of meromorphic functions. Nauka, Moscow, 1970. (in Russian)

[5] Kahane J.-P. Some random series of functions. University Press, Cambridge, 1994.

[6] Pólya G., Szegö G. Problems and theorems in the analysis. V. 2. Nauka, Moscow, 1978. (in Russian)

[7] Wahlund A. *Über einen Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage der ganzen Funktion und seiner unteren Grenze nach dem Jensensche Theoreme.* Arkiv Math. 1929, **21 A** (23), 1–34.

[8] Zakharko Yu.B., Filevych P.V. *The Nevanlinna characteristic and maximum modulus of entire functions of finite order with random zeros.* Mat. Stud. 2011, **36**, 1, 40–50. (in Ukrainian)

Надійшло 11.01.2013

Zakharko Yu.B., Filevych P.V. *The growth of Weierstrass canonical products of genus zero with random zeros.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 50–58.

Let $\zeta = (\zeta_n)$ be a complex sequence of genus zero, τ be its exponent of convergence, $N(r)$ be its integrated counting function, $\pi(z) = \prod(1 - \frac{z}{\zeta_n})$ be the Weierstrass canonical product, and $M(r)$ be the maximum modulus of this product. Then, as is known, the Wahlund-Valiron inequality

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{\ln M(r)} \geq w(\tau), \qquad w(\tau) := \frac{\sin \pi\tau}{\pi\tau},$$

holds, and this inequality is sharp. It is proved that for the majority (in the probability sense) of sequences ζ the constant $w(\tau)$ can be replaced by the constant $w\left(\frac{\tau}{2}\right)$ in the Wahlund-Valiron inequality.

Key words and phrases: entire function, Weierstrass products, maximum modulus, order, genus, exponent of convergence, integrated counting function.

Захарко Ю.Б., Филевич П.В. *Рост канонических произведений Вейерштрасса нулевого рода со случайными нулями* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 50–58.

Пусть $\zeta = (\zeta_n)$ — комплексная последовательность нулевого рода с показателем сходимости τ, $N(r)$ — ее усредненная считающая функция, $\pi(z) = \prod(1 - \frac{z}{\zeta_n})$ — каноническое произведение Вейерштрасса, а $M(r)$ — максимум модуля этого произведения. Известно, что тогда выполняется неравенство Валунда-Валирона

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{\ln M(r)} \geq w(\tau), \qquad w(\tau) := \frac{\sin \pi\tau}{\pi\tau},$$

и это неравенство является точным. В роботе доказано, что для большинства (в вероятностном смысле) последовательностей ζ постоянную $w(\tau)$ в неравенстве Валунда-Валирона можно заменить постоянной $w\left(\frac{\tau}{2}\right)$.

Ключевые слова и фразы: целая функция, произведение Вейерштрасса, максимум модуля, порядок, род, показатель сходимости, усредненная считающая функция.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.98

KRAVTSIV V.V.[1], MOZHYROVSKA Z.G.[2], ZAGORODNYUK A.V.[1]

HYPERCYCLIC OPERATORS ON SPACES OF BLOCK-SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS

Kravtsiv V.V., Mozhyrovska Z.G., Zagorodnyuk A.V. *Hypercyclic operators on spaces of block-symmetric analytic functions.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 59–62.

The paper contains proof of the hypercyclicity of "symmetric translation" on the algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type on an isomorphic copy of ℓ_1.

Key words and phrases: block-symmetric analytic functions, hypercyclic operator, symmetric translation operator.

[1] Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

[2] Lviv Commercial Academy, Lviv, Ukraine

E-mail: maksymivvika@gmail.com (Kravtsiv V.V.), nzoriana@yandex.com (Mozhyrovska Z.G.), andriyzag@yahoo.com (Zagorodnyuk A.V.)

INTRODUCTION

Let X be a Fréchet linear space. A continuous linear operator $T : X \to X$ is called hypercyclic if there is a vector $x_0 \in X$ for which the orbit under T, $Orb(T, x_0) = \{x_0, Tx_0, T^2x_0, \ldots\}$, is dense in X. Every such vector x_0 is called a hypercyclic vector of T. The classical Birkhoff theorem [2] asserts that any operator of composition with translation $x \to x + a$, $T_a : f(x) \to f(x + a)$ is hypercyclic on the space of entire functions $H(\mathbb{C})$ on the complex plane $\mathbb{C}$ if $a \neq 0$. The Birkhoff translation T_a has also been regarded as a differentiation operator

$$T_a(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} D^n f.$$

A generalization of the Birkhoff theorem was proved by Godefroy and Shapiro in [3]. They showed that if $\varphi(z) = \sum_{|\alpha|\geq 1} c_\alpha z^\alpha$ is a non-constant entire function of exponential type on $\mathbb{C}^n$, then the operator

$$f \to \sum_{|\alpha|\geq 1} c_\alpha D^\alpha f, \qquad f \in H(\mathbb{C}^n),$$

is hypercyclic. Note that an analog of the Godefroy-Shapiro Theorem for weakly continuous analytic functions on Banach spaces which are bounded on bounded subsets was proved by Aron and Bés in [1]. A symmetric version of the Godefroy-Shapiro Theorem is proved in [9]. The purpose of this paper is to extend the results on hypercyclicity for the case of a special translation operator on the space of block-symmetric analytic functions of bounded type on ℓ_1.

The following proposition is well known (see [4, Proposition 4]).

Proposition 1. *Let T be a hypercyclic operator on X and A be an isomorphism on X. Then $A^{-1}TA$ is hypercyclic.*

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46J15, 46E10, 46E50.

1 BLOCK-SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS

Let $\mathcal{X}^2 = \oplus_{\ell_1}\mathbb{C}^2$ be an infinite ℓ_1-sum of copies of Banach space $\mathbb{C}^2$. So any element $\overline{x} \in \mathcal{X}^2$ can be represented as a sequence $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, where $x_n \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$, and $\|\overline{x}\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{\mathbb{C}^2} < \infty$.

A polynomial P on the space $\mathcal{X}^2$ is called block-symmetric (or vector-symmetric) if

$$P\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}_1, \ldots, \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}_m, \ldots\right) = P\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}_{\sigma(1)}, \ldots, \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}_{\sigma(m)}, \ldots\right)$$

for every permutation σ on the set $\mathbb{N}$, where $\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $i \in \mathbb{N}$. Let us denote by $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^2)$ the algebra of block-symmetric polynomials on $\mathcal{X}^2$.

In paper [8] it was shown that the following vectors form an algebraic basis of $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^2)$

$$H^{k_1,k_2}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^{k_1}(y_i)^{k_2},$$

where $(x_i, y_i) \in \mathbb{C}^2$, $i \geq 1$. Let us fix an enumerating of the basis functions $H_1 = H^{1,0}, \ldots, H_n = H^{m_1,m_2}, \ldots$.

Denote by $H^n_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ the algebra of block-symmetric analytic functions on $\mathcal{X}^2$ which are topologically generated by polynomials $H_1, \ldots, H_n$. We will use the notation $\mathbf{H} := \{H_k\}_{k=1}^n$.

Lemma 1. *The map*

$$\mathcal{H}^{\mathbf{H}}_n : f(t_1, \ldots, t_n) \to f(H_1, \ldots, H_n)$$

is a topological isomorphism from the algebra $H(\mathbb{C}^n)$ to the algebra $H^n_{bvs}(\mathcal{X}^2)$.

Proof. Evidently, $\mathcal{H}^{\mathbf{H}}_n$ is a homomorphism. It is known [6, 7] that for every vector $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ there exists an element $(x,y) \in \mathcal{X}^2$ such that $H_1(x,y) = t_1, \ldots, H_n(x,y) = t_n$. Therefore the map $\mathcal{H}^{\mathbf{H}}_n$ is injective. Let us show that $\mathcal{H}^{\mathbf{H}}_n$ is surjective. Let $u \in H^n_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ and $u = \sum u_k$ be the Taylor series expansion of u at zero. For every homogeneous polynomial u_k there exists a polynomial q_k on $\mathbb{C}^n$ such that $u_k = q_k(H_1, \ldots, H_n)$. Put $f(t_1, \ldots, t_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k(t_1, \ldots, t_n)$. Since f is a power series which converges for every vector $(t_1, \ldots, t_n)$, f is an entire analytic function on $\mathbb{C}^n$. Evidently, $\mathcal{H}^{\mathbf{H}}_n(f) = u$. From the known theorem about automatic continuity of an isomorphism between commutative finitely generated Fréchet algebras [5, p. 43] it follows that $\mathcal{H}^{\mathbf{H}}_n$ is continuous. $\square$

Let $(x,y), (z,t) \in \mathcal{X}^2$,

$$(x,y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}, \ldots\right) \quad \text{and} \quad (z,t) = \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} z_m \\ t_m \end{pmatrix}, \ldots\right)$$

where $(x_i, y_i), (z_i, t_i) \in \mathbb{C}^2$, $i \in \mathbb{N}$. We put

$$(x,y) \bullet (z,t) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_m \\ t_m \end{pmatrix}, \ldots\right)$$

and define

$$\mathcal{T}_{(z,t)}(f)(x,y) := f((x,y) \bullet (z,t)). \tag{1}$$

We will say that $(x,y) \to (x,y) \bullet (z,t)$ is the symmetric translation and the operator $\mathcal{T}_{(z,t)}$ is the symmetric translation operator. Evidently, we have that

$$H^{k_1,k_2}((x,y) \bullet (z,t)) = H^{k_1,k_2}(x,y) + H^{k_1,k_2}(z,t)$$

for all k_1, k_2. It is easy to see that $\mathcal{T}_{(z,t)}$ is a continuous linear operator from $H^n_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ to itself.

Theorem 1. *Let $(z,t) \in \mathcal{X}^2$ such that $(H_1(z,t), \ldots, H_n(z,t))$ is nonzero vector in $\mathbb{C}^n$. Then the symmetric translation operator $\mathcal{T}_{(z,t)}$ is hypercyclic on $H^n_{bvs}(\mathcal{X}^2)$.*

Proof. Let $a = (H_1(z,t), \ldots, H_n(z,t)) \in \mathbb{C}^n$. If $g \in H^n_{bvs}(\mathcal{X}^2)$, then

$$g(x,y) = \mathcal{H}^{\mathbf{H}}_n(f)(x,y) = f(H_1(x,y), \ldots, H_n(x,y))$$

for some $f \in H^n_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ and property (1) implies

$$\mathcal{T}_{(z,t)}(g)(x,y) = \mathcal{H}^{\mathbf{H}}_n T_a (\mathcal{H}^{\mathbf{H}}_n)^{-1}(g)(x,y).$$

Since T_a is hypercyclic on $H(\mathbb{C}^n)$, the operator $\mathcal{T}_{(z,t)}$ is hypercyclic on $H^n_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ via Proposition 1, which completes the proof. $\square$

2 THE INFINITY-DIMENSIONAL CASE

Let us recall a well known Kitai-Gethner-Shapiro theorem which is also known as the Hypercyclicity Criterion.

Theorem 2. *Let X be separable Fréchet space and $T : X \to X$ be a linear and continuous operator. Suppose there exist X_0, Y_0 dense subsets of X, a sequence (n_k) of positive integers and a sequence of mappings (possibly nonlinear, possibly not continuous) $S_n : Y_0 \to X$ so that*

1) *$T^{n_k}(x) \to 0$ for every $x \in X_0$ as $k \to \infty$;*
2) *$S^{n_k}(y) \to 0$ for every $y \in Y_0$ as $k \to \infty$;*
3) *$T^{n_k} \circ S^{n_k}(y) = y$ for every $y \in Y_0$.*

Then T is hypercyclic.

The operator T is said to satisfy the Hypercyclicity Criterion for full sequence if we can chose $n_k = k$. Note that T_a satisfies the Hypercyclicity Criterion for full sequence [3] and so the symmetric shift $\mathcal{T}_{(z,t)}$ on $H^n_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ satisfies the Hypercyclicity Criterion for full sequence provided $(H_1(z,t), \ldots, H_n(z,t)) \neq 0$.

In [9] it is proved the following lemma.

Lemma 2. *Let X be a Fréchet space and $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$ be a sequence of closed subspaces such that $\cup_{m=1}^{\infty} X_m$ is dense in X. Let T be an operator on X such that $T(X_m) \subset X_m$ for each m and each restriction $T|_{X_m}$ satisfies the Hypercyclicity Criterion for full sequence on X_m. Then T satisfies the Hypercyclicity Criterion for full sequence on X.*

We denote by $H_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ the Fréchet algebra of all block-symmetric analytic functions on $\mathcal{X}^2$ which are bounded on bounded subset. This algebra is the completion of the space of block-symmetric polynomials on $\mathcal{X}^2$ endowed with the uniform topology on bounded subset.

Theorem 3. *The operator $\mathcal{T}_{(z,t)}$ is hypercyclic on $H_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ for every $(z,t) \neq 0$.*

Proof. Since $(z,t) \neq 0$, we have $H_{m_0}(z,t) \neq 0$ for some m_0 [6, 7]. So, $\mathcal{T}_{(z,t)}$ is hypercyclic (and satisfies the Hypercyclicity Criterion for full sequence) on $H^n_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ whenever $n \geq m_0$. The set $\cup_{n=m_0}^{\infty} H^n_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ contains the space of all block-symmetric polynomials on $\mathcal{X}^2$ and so it is dense in $H_{bvs}(\mathcal{X}^2)$. Also $H^n_{bvs}(\mathcal{X}^2) \subset H^m_{bvs}(\mathcal{X}^2)$ if $m > n$. Hence $\mathcal{T}_{(z,t)}$ is hypercyclic via Lemma 2. □

References

[1] Aron R., Bés J. *Hypercyclic differentiation operators.* Contemporary Mathematics 1999, **232**, 39–46.

[2] Birkhoff G.D. *Démonstration d'un théorèm élémentaire sur les functions entières.* C. D. Acad. Sci. Paris 1929, **189**, 473–475.

[3] Godefroy G., Shapiro J.H. *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds.* J. Funct. Anal. 1991, **98**, 229–269. doi: 10.1016/0022-1236(91)90078-J

[4] Grosse-Erdmann K.-G. *Universal families and hypercyclic operators.* Bull. Amer. Math. Soc. 1999, **36**, 345–381.

[5] Hussain T. Multiplicative Functionals on Topological Algebras. Reseach Notes Math. Pitman Advansed Publishing Program 85, Boston-London-Melbourne, 1983.

[6] Kravtsiv V.V. Symmetric analytic functions on products of Banach spaces. Ph.D. thesis, 2012. (in Ukrainian)

[7] Kravtsiv V.V., Labachuk O.V., Zagorodnyuk A.V. *Nullstellensatz for block-symmetric polynomials on the Banach space.* Preprint. (in Ukrainian)

[8] Kravtsiv V.V., Zagorodnyuk A.V. *On algebraic bases of algebras of block-symmetric polynomials on Banach spaces.* Mat. Stud. 2012, **37** (1), 109–112.

[9] Novosad Z., Zagorodnyuk A. *Polynomial automorphisms and hypercyclic operators on spaces of analytic functions.* Arch. Math. 2007, **89**, 157–166. doi: 10.1007/s00013-007-2043-4

Received 19.02.2013

Кравців В.В., Можировська З.Г., Загороднюк А.В. *Гіперциклічні оператори на просторах блочно-симетричних аналітичних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 59–62.

Стаття містить доведення гіперциклічності оператора симетричного зсуву на алгебрі блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на ізоморфній копії простору ℓ_1.

Ключові слова і фрази: блочно-симетричні аналітичні функції, гіперциклічний оператор, оператор симетричного зсуву.

Кравцив В.В., Можировская З.Г., Загороднюк А.В. *Гиперциклические операторы на пространствах блочно-симметрических аналитических функций* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 59–62.

Статья содержит доказательство гиперцикличности оператора симметрического сдвига на алгебре блочно-симметрических аналитических функций ограниченного типа на изоморфной копии пространства ℓ_1.

Ключевые слова и фразы: блочно-симметрические аналитические функции, гиперциклический оператор, оператор симметрического сдвига.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 512.64

ЛАДЗОРИШИН Н.Б.

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПАР МАТРИЦЬ, ВИЗНАЧНИКИ ЯКИХ Є СТЕПЕНЯМИ ПРОСТИХ ЧИСЕЛ, НАД КВАДРАТИЧНИМИ ЕВКЛІДОВИМИ КІЛЬЦЯМИ

Ладзоришин Н.Б. *Про еквівалентність пар матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичними евклідовими кільцями* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 63–69.

Встановлено, що пара матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичним евклідовим кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ спільними рядковими елементарними операціями над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і різними стовпцевими елементарними операціями над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ зводиться до трикутних форм з інваріантними множниками на головних діагоналях.

Ключові слова і фрази: квадратичне евклідове кільце, еквівалентність пар матриць.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
E-mail: natalja.ladzoryshyn@gmail.com

Вступ

Поняття напівскалярної еквівалентності було введено П.С. Казімірським і В.М. Петричковичем в 1977 році [4]. Вони встановили, що многочленна матриця неособлива або повного рангу над алгебраїчно замкнутим полем характеристики нуль напівскалярно-еквівалентна до трикутної матриці з інваріантними множниками на головній діагоналі. Схожий результат щодо напівскалярної еквівалентності неособливих многочленних матриць пізніше формулюють J.A. Dias da Silva і T.J. Laffey у 1999 році [1]. В роботі [8] встановлено аналог цієї еквівалентності для матриць над евклідовими квадратичними кільцями та доведено, що кожна матриця над цим кільцем за допомогою таких еквівалентних перетворень зводиться до трикутної форми з інваріантними множниками на головній діагоналі. Еквівалентність пар матриць лише зі спільною односторонньою перетворювальною матрицею досліджували V. Dlab і C.M. Ringel [2]. Вони розглянули еквівалентність пар комплексних матриць A_1, A_2, яку схематично можна зобразити у вигляді QA_1P_1, QA_2P_2, де Q — комплексна, P_1, P_2 — дійсні оборотні матриці і встановили канонічну форму щодо таких перетворень. В.В. Сергейчук і Т.Н. Гайдук запропонували канонічну форму A_{gen}, B_{gen} для пари матриць A, B над полем стосовно спільних рядкових і різних стовпцевих перетворень [3]. У роботі [7] П.С. Казімірський і Б.В. Забавський довели, що пара матриць над адекватним кільцем, одна з яких неособлива, спільними рядковими і різними стовпцевими перетвореннями зводиться до трикутного вигляду з інваріантними множниками на головних діагоналях.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 15A21.

У цій роботі доведено, що пара матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичним евклідовим кільцем за допомогою спільних елементарних операцій із кільця $\mathbb{Z}$ над рядками і різних елементарних операцій із кільця $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ над стовпцями зводиться до трикутних форм з інваріантними множниками на головних діагоналях.

1 Квадратичні евклідові кільця

Нехай $\mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$ і k не ділиться на квадрат жодного простого числа. Тоді $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ — квадратичне кільце [6]. Якщо $k \equiv 2,3(\mathrm{mod} 4)$, тоді $\mathbb{K}$ складається з елементів вигляду $x + y\sqrt{k}$, де $x, y \in \mathbb{Z}$; якщо $k \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$, тоді елементи кільця мають вигляд $\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{k}$, де $x, y \in \mathbb{Z}$ і $x - y$ ділиться на 2.

При $k < 0$ квадратичне кільце називається уявним, а при $k > 0$ — дійсним. Відомо п'ять уявних і сімнадцять дійсних квадратичних кілець, які є евклідовими. В цих кільцях евклідова норма визначається наступним чином:

$$\text{для } k < 0 \qquad e(x + y\sqrt{k}) = x^2 - ky^2; \qquad e\Big(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{k}\Big) = \frac{1}{4}(x^2 - ky^2),$$

$$\text{для } k > 0 \qquad e(x + y\sqrt{k}) = |x^2 - ky^2|; \qquad e\Big(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{k}\Big) = \frac{1}{4}|x^2 - ky^2|.$$

Евклідові норми простих чисел в квадратичному евклідовому кільці є простими раціональними числами або квадратами простих раціональних чисел. Кожне евклідове квадратичне кільце є кільцем головних ідеалів. Однак відомо, що квадратичне кільце $\mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$ є кільцем головних ідеалів, але не є евклідовим. Існують квадратичні кільця, які не є кільцями головних ідеалів, наприклад, кільце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

2 Еквівалентність матриць над квадратичними евклідовими кільцями

Надалі $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ — евклідове квадратичне кільце. Через $M(m,n,\mathbb{K})$ позначимо множину $m \times n$ матриць над кільцем $\mathbb{K}$, а через $M(n,\mathbb{K})$ — множину квадратних матриць n-го порядку, d_k^A — найбільший спільний дільник мінорів k-го порядку матриці A.

Лема 2.1. *Нехай $A \in M(2,n,\mathbb{K})$, $n \geq 2$ і $d_2^A = p^r$, де p — просте число з $\mathbb{K}$. Тоді існує рядок $\|x_1 \ \ x_2\|$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ такий, що*

$$\|x_1 \ \ x_2\|\, A = \|a'_{11} \ \ \ldots \ \ a'_{1n}\|,$$

де $(a'_{11}, ..., a'_{1n}) = d_1^A$.

Доведення. Нехай

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \end{Vmatrix}.$$

Без обмеження загальності будемо вважати, що $d_1^A = 1$. Тоді правими елементарними перетвореннями над $\mathbb{K}$ матрицю A зводимо до трикутного вигляду

$$AV = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} = A_1,$$

де $V \in GL(n,\mathbb{K})$. Оскільки $\|\, x_1 \ \ x_2 \,\| A_1 = \|\, x_1a_1 + x_2a_3 \ \ x_2a_2 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0 \,\|$, тоді потрібно довести, що існують такі елементи $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що

$$(x_1a_1 + x_2a_3, x_2a_2) = 1. \tag{1}$$

В матриці A найбільший спільний дільник мінорів другого порядку $d_2^A = p^r$. Отже, $a_1a_2 = p^r$, де $a_1 = p^{r_1}$, $a_2 = p^{r_2}$, $r_1 + r_2 = r$, $r_1, r_2 \geq 0$. Тоді умова (1) виконується при наступних $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) = 1$:

1) $p \nmid x_2$ (p не ділить x_2), якщо $r_1 > 0$, $r_2 \geq 0$.

Зауважимо, що якщо $p = p_1 + p_2\sqrt{k}$, то $(p_1 + p_2\sqrt{k})(p_1 - p_2\sqrt{k}) = \alpha$, де $\alpha \in \mathbb{Z}$, α ділиться на p.

2) $p \mid x_2$ (p ділить x_2) і $p \nmid x_1$, якщо $r_1 = 0$, $r_2 > 0$.

Лему доведено. □

Лема 2.2. *Нехай $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, $m \leq n$ і $d_m^A = p^r$, де p — просте число з $\mathbb{K}$. Тоді існує рядок $\mathbf{x} = \|x_1 \ \ \ldots \ \ x_m\|$, де $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{Z}$ такий, що*

$$\mathbf{x}A = \|a'_{11} \ \ \ldots \ \ a'_{1n}\|, \tag{2}$$

де $(a'_{11}, \ldots, a'_{1n}) = d_1^A$.

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|_1^{m,n}$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Доведення проведемо методом математичної індукції за m. Для $m = 2$ твердження справедливе за лемою 2.1. Припустимо, що лема справедлива для $m - 1$. Тобто для матриці

$$A_{m-1} = \begin{Vmatrix} a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

існує рядок $\|t_2 \ \ \ldots \ \ t_m\|$, де $t_i \in \mathbb{Z}$, $i = 2, \ldots, m$ такий, що

$$\|t_2 \ \ \ldots \ \ t_m\|\, A_{m-1} = \|a'_{21} \ \ \ldots \ \ a'_{2n}\|,$$

де $(a'_{21}, \ldots, a'_{2n}) = d_1^{A_{m-1}}$ і $a'_{2j} = \sum_{i=2}^m t_i a_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$.

Доведемо лему для довільного m. Розглянемо матрицю

$$\tilde{A}_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a'_{21} & \ldots & a'_{2n} \end{Vmatrix}.$$

На основі леми 2.1 існує рядок $\|x \ \ y\|$ такий, що

$$\|x \ \ y\|\, \tilde{A}_1 = \|a'_{11} \ \ \ldots \ \ a'_{1n}\|,$$

де

$$a'_{1j} = xa_{1j} + ya'_{2j} = xa_{1j} + y\sum_{i=2}^m t_i a_{ij},$$

$j = 1, \ldots, n$, і $(a'_{11}, \ldots, a'_{1n}) = d_1^A$, тобто виконується умова (2). Звідси одержимо, що шуканим рядком є рядок $\mathbf{x} = \|x_1 \ \ \ldots \ \ x_m\|$, де $x_1 = x$, $x_i = yt_i$, $i = 2, \ldots, m$. Лему доведено. □

Теорема 1. *Нехай $A \in M(n, \mathbb{K})$ і $\det A = p^r$, де p — просте число з $\mathbb{K}$. Тоді існують оборотні матриці $Q \in GL(n, \mathbb{Z})$ і $R \in GL(n, \mathbb{K})$ такі, що*

$$QAR = \begin{Vmatrix} p^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{a}_{21} & p^{r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & p^{r_n} \end{Vmatrix} = T^A, \tag{3}$$

де $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n$ і $e(\tilde{a}_{ij}) < e(p^{r_i})$, $e(\tilde{a}_{ij})$ — евклідова норма числа $\tilde{a}_{ij}$.

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|_1^n$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i, j = 1, \ldots, n$. На основі леми 2.2 існує рядок $\mathbf{x} = \|x_1 \ \ \ldots \ \ x_n\|$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ такий, що $\mathbf{x}A = \|a'_{11} \ \ \ldots \ \ a'_{1n}\|$, де $(a'_{11}, \ldots, a'_{1n}) = d_1^A$.

Відомо [5], що унімодулярний рядок $\mathbf{x}$ доповнюється до оборотної матриці

$$Q = \begin{Vmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ & * & \end{Vmatrix},$$

де $*$ — деякі елементи матриці.

Тоді $QA = \begin{Vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ & * & \end{Vmatrix} = A_1$, де $(a'_{11}, \ldots, a'_{1n}) = d_1^A$. Існує матриця $R_1 \in GL(n, K)$ така, що

$$A_1R_1 = QAR_1 = \left\Vert \begin{array}{c|c} p^{r_1} & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{a}_{21} & \\ \vdots & \tilde{A}_{n-1} \\ \tilde{a}_{n1} & \end{array} \right\Vert,$$

де $p^{r_1} = d_1^{A_1} = d_1^A$ і $\tilde{A}_{n-1}$ – матриця порядку $n-1$. Зауважимо, що p^{r_1} ділить $\tilde{a}_{i1}$, $i = 2, \ldots, n$ і всі елементи матриці $\tilde{A}_{n-1}$. Отже p^{r_1} є першим інваріантним множником матриці A.

Проводимо аналогічні міркування з матрицею $\tilde{A}_{n-1}$ і через скінченну кількість кроків за допомогою зазначених вище елементарних операцій зведемо матрицю A до вигляду (3). Теорему доведено. □

3 Еквівалентність пар матриць над квадратичними евклідовими кільцями

Лема 3.1. *Нехай $A, B \in M(2, n, \mathbb{K})$, $n \ge 2$ і $d_2^A = p^r$, $d_2^B = q^s$, де p, q — прості числа з $\mathbb{K}$. Тоді існує рядок $\|x_1 \ \ x_2\|$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ такий, що*

$$\|x_1 \ \ x_2\|\, A = \|a'_{11} \ \ \ldots \ \ a'_{1n}\|, \qquad \|x_1 \ \ x_2\|\, B = \|b'_{11} \ \ \ldots \ \ b'_{1n}\|, \tag{4}$$

де $(a'_{11}, \ldots, a'_{1n}) = d_1^A$, $(b'_{11}, \ldots, b'_{1n}) = d_1^B$.

Доведення. Нехай $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \end{Vmatrix}$. Без обмеження загальності, будемо вважати, що $d_1^A = 1$ і $d_1^B = 1$. За теоремою 1 існують матриці $\tilde{Q} \in GL(2, \mathbb{Z})$ і $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \in GL(n, \mathbb{K})$ такі, що

$$\tilde{Q}A\tilde{R}_1 = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = A', \qquad \tilde{Q}B\tilde{R}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & q^s & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = B',$$

де $a_1a_2 = p^r$.

Тепер необхідно довести, що існує такий рядок $\|x_1 \ \ x_2\|$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що

$$\|x_1 \ \ x_2\|\, A' = \|x_1a_1 + x_2a_3 \ \ \ x_2a_2 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0\|,$$

$$\|x_1 \ \ x_2\|\, B' = \|x_1 + x_2b \ \ \ x_2q^s \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0\|,$$

де

$$(x_1a_1 + x_2a_3, x_2a_2) = 1 \tag{5}$$

і

$$(x_1 + x_2b, x_2q^s) = 1. \tag{6}$$

Оскільки $a_1a_2 = p^r$, тоді $a_1 = p^{r_1}$, $a_2 = p^{r_2}$, $r_1, r_2 \ge 0$. За лемою 2.1 існують такі $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що виконується умова (5). Безпосередньо перевіряється, що умови (5), (6) виконуються при наступних $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) = 1$:

1) $p,\ q \nmid x_2$, і $q \mid x_1$, якщо $q \nmid b$; $q \nmid x_1$, якщо $q \mid b$; якщо $r_1 > 0$, $r_2 \ge 0$.
2) $p,\ q \mid x_2$, і $p,\ q \nmid x_1$, якщо $r_1 = 0$, $r_2 > 0$;
3) якщо $r_1 = r_2 = r = 0$, то доведення випливає з леми 2.1.

Отже, для матриць A і B існує такий рядок $\|x_1 \ \ x_2\|$, що виконується умова (4). Лему доведено. □

Лема 3.2. *Нехай $A, B \in M(m, n, \mathbb{K})$, $m \le n$ і $d_m^A = p^r$, $d_m^B = q^s$, де p, q — прості числа з $\mathbb{K}$. Тоді існує рядок $\mathbf{x} = \|x_1 \ \ \ldots \ \ x_m\|$, $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{Z}$ такий, що*

$$\mathbf{x}A = \|a'_{11} \ \ \ldots \ \ a'_{1n}\|, \qquad \mathbf{x}B = \|b'_{11} \ \ \ldots \ \ b'_{1n}\|, \tag{7}$$

де $(a'_{11}, \ldots, a'_{1n}) = d_1^A$, $(b'_{11}, \ldots, b'_{1n}) = d_1^B$.

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|_1^{m,n}$, $B = \|b_{ij}\|_1^{m,n}$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Доведемо лему методом математичної індукції за m. Для $m = 2$ справедливість твердження випливає з леми 3.1.

Припустимо, що лема справедлива для $m-1$. Тобто для матриць

$$A_{m-1} = \begin{Vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad B_{m-1} = \begin{Vmatrix} b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix}$$

існує рядок $\|t_2 \ \ \ldots \ \ t_m\|$, де $t_i \in \mathbb{Z}$, $i = 2, \ldots, m$ такий, що

$$\|t_2 \ \ \ldots \ \ t_m\|\, A_{m-1} = \|a'_{21} \ \ \ldots \ \ a'_{2n}\| \quad \text{і} \quad \|t_2 \ \ \ldots \ \ t_m\|\, B_{m-1} = \|b'_{21} \ \ \ldots \ \ b'_{2n}\|,$$

де

$$(a'_{21}, \ldots, a'_{2n}) = d_1^{A_{m-1}}, \qquad (b'_{21}, \ldots, b'_{2n}) = d_1^{B_{m-1}}$$

і

$$a'_{2j} = \sum_{i=2}^{m} t_i a_{ij}, \qquad b'_{2j} = \sum_{i=2}^{m} t_i b_{ij}, \ \ j = 1, \ldots, n.$$

Доведемо лему для довільного m. Розглянемо матриці:

$$\bar{A}_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & \dots & a'_{2n} \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad \bar{B}_1 = \begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b'_{21} & \dots & b'_{2n} \end{Vmatrix}.$$

На основі леми 3.1 існує такий рядок $\|x \quad y\|$, що

$$\|x \quad y\| \, \bar{A}_1 = \|a'_{11} \quad \dots \quad a'_{1n}\| \quad \text{i} \quad \|x \quad y\| \, \bar{B}_1 = \|b'_{11} \quad \dots \quad b'_{1n}\|,$$

де $(a'_{11}, \dots, a'_{1n}) = d_1^A$, $(b'_{11}, \dots, b'_{1n}) = d_1^B$ і

$$a'_{1j} = xa_{1j} + ya'_{2j} = xa_{1j} + y\sum_{i=2}^{m} t_i a_{ij},$$

$$b'_{1j} = xb_{1j} + yb'_{2j} = xb_{1j} + y\sum_{i=2}^{m} t_i b_{ij}, \; j = 1, \dots, n.$$

Звідси одержимо, що шуканим рядком є рядок $\mathbf{x} = \|x_1 \quad \dots \quad x_m\|$, де $x_1 = x$, $x_i = yt_i$, $i = 2, \dots, m$, який задовольняє умову (7). Лему доведено. □

Теорема 2. *Нехай $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ і $\det A = p^r$, $\det B = q^s$, де p, q — прості числа з $\mathbb{K}$. Тоді існують матриці $Q \in GL(n, \mathbb{Z})$ і $R_1, R_2 \in GL(n, \mathbb{K})$ такі, що*

$$QAR_1 = \begin{Vmatrix} p^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_{21} & p^{r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \dots & p^{r_n} \end{Vmatrix} = T^A, \qquad QBR_2 = \begin{Vmatrix} q^{s_1} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{b}_{21} & q^{s_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{b}_{n1} & \bar{b}_{n2}q^{s_2} & \dots & q^{s_n} \end{Vmatrix} = T^B, \tag{8}$$

де $r_1 \le r_2 \le \dots \le r_n$ і $e(\bar{a}_{ij}) < e(p^{r_i})$; $s_1 \le s_2 \le \dots \le s_n$ і $e(\bar{b}_{ij}) < e(q^{s_i})$; $i, j = 1, \dots, n$.

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|_1^{m,n}$, $B = \|b_{ij}\|_1^{m,n}$, a_{ij}, $b_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. На основі леми 3.2 існує рядок $\mathbf{x} = \|x_1 \quad \dots \quad x_n\|$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ такий, що

$$\mathbf{x}A = \|a'_{11} \quad \dots \quad a'_{1n}\|, \qquad \mathbf{x}B = \|b'_{11} \quad \dots \quad b'_{1n}\|,$$

де $(a'_{11}, \dots, a'_{1n}) = d_1^A$ і $(b'_{11}, \dots, b'_{1n}) = d_1^B$. Рядок $\mathbf{x}$ можна доповнити до оборотної матриці $Q = \begin{Vmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ & * & \end{Vmatrix}$. Таким чином,

$$QA = \begin{Vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ & * & \end{Vmatrix} = A_1 \quad \text{i} \quad QB = \begin{Vmatrix} b'_{11} & \dots & b'_{1n} \\ & * & \end{Vmatrix} = B_1.$$

Тоді існують матриці $\bar{R}_1, \bar{R}_2 \in GL(n, K)$ такі, що

$$A_1\bar{R}_1 = QA\bar{R}_1 = \left\Vert \begin{array}{c|c} p^{r_1} & \mathbf{0} \\ \hline \bar{a}_{21} & \\ \vdots & \bar{A}_{n-1} \\ \bar{a}_{n1} & \end{array} \right\Vert, \qquad B_1\bar{R}_2 = QB\bar{R}_2 = \left\Vert \begin{array}{c|c} q^{s_1} & \mathbf{0} \\ \hline \bar{b}_{21} & \\ \vdots & \bar{B}_{n-1} \\ \bar{b}_{n1} & \end{array} \right\Vert,$$

де $d_1^{A_1} = d_1^A = p^{r_1}$, $d_1^{B_1} = d_1^B = q^{s_1}$ і $\bar{A}_{n-1}$, $\bar{B}_{n-1}$ — матриці порядків $n-1$. Зауважимо, що p^{r_1} ділить $\bar{a}_{i1}$, $i = 2, \dots, n$ і ділить всі елементи матриці $\bar{A}_{n-1}$; q^{s_1} ділить $\bar{b}_{i1}$, $i = 2, \dots, n$ і всі елементи матриці $\bar{B}_{n-1}$. Таким чином p^{r_1} і q^{s_1} є першими інваріантними множниками матриць A_1 і B_1, і, отже, матриць A і B.

Застосовуємо аналогічні міркування до матриць $\bar{A}_{n-1}$ і $\bar{B}_{n-1}$. Продовжуючи цей процес, через скінченну кількість кроків за допомогою вказаних елементарних операцій зведемо матриці A і B до вигляду (8). Теорему доведено. □

REFERENCES

[1] Dias da Silva J.A., Laffey T. J. *On simultaneous similarity of matrices and related questions.* Linear Algebra Appl. 1999, **291**, 167–184.

[2] Dlab V., Ringel C.M. *Canonical forms of pairs of complex matrices.* Linear Algebra Appl. 1991, **147**, 387–410.

[3] Gaiduk T.N., Sergeichuk V.V. *Generic canonical form of pairs of matrices with zeros.* Linear Algebra Appl. 2004, **380**, 241–251.

[4] Kazimirs'kii P.S., Petrychkovych V.M. Equivalence of polynomial matrices. In: Theoretical and Applied Problems of Algebra and Differential Equations. Naukova Dumka, Kiev, 1977, 61–66. (in Ukrainian)

[5] Newman M. Integral matrices. Academic Press, New York, 1972.

[6] Rodosskii K.A. The Euclidean algorithm. Nauka, Moscow, 1988. (in Russian)

[7] Zabavskii B.V., Kazimirs'kii P.S. *Reduction of a pair of matrices over an adequate ring to a special triangular form by means of the same one-sided transformations.* Ukr. Math. J. 1984, **36** (2), 233–235. (in Russian)

[8] Zelisko V.R., Ladzoryshyn N.B., Petrychkovych V.M. *On equivalence of matrices over quadratic euclidean rings.* Appl. Problems of Mechanics and Math. 2006, **4**, 16–21. (in Ukrainian)

Надійшло 04.07.2012

Ladzoryshyn N.B. *On equivalence of pairs of matrices, which determinants are primes powers, over quadratic Euclidean rings.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 63–69.

We establish that a pair of matrices, which determinants are primes powers, can be reduced over quadratic Euclidean ring $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ to their triangular forms with invariant factors on a main diagonal by using the common transformation of rows over a ring of rational integers $\mathbb{Z}$ and separate transformations of columns over a quadratic ring $\mathbb{K}$.

Key words and phrases: quadratic Euclidean ring, equivalence of pairs of matrices.

Ладзоришин Н.Б. *Об эквивалентности пар матриц, определители которых являются степенями простых чисел, над квадратичными евклидовымы кольцами* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 63–69.

Установлено, что пара матриц, определители которых являются степенями простых чисел, над квадратичным евклидовым кольцом $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ элементарными преобразованиями над строками над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ и различными элементарными преобразованиями над столбцами над квадратичным кольцом $\mathbb{K}$ приводятся к треугольным формам с инвариантными множителями на главных диагоналях.

Ключевые слова и фразы: квадратичное евклидово кольцо, эквивалентность пар матриц.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 512.54

Лещенко Ю.Ю., Зоря Л.В.

ОЦЕНКИ ДИАМЕТРОВ ГРАФОВ КОММУТАТИВНОСТИ СИЛОВСКИХ p-ПОДГРУПП СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

Лещенко Ю.Ю., Зоря Л.В. *Оценки диаметров графов коммутативности силовских p-подгрупп симметрических групп* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 70–78.

Графом коммутативности конечной неабелевой группы G называется граф, вершины которого — нецентральные элементы группы G и две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = yx$. В статье изучаются свойства графов коммутативности силовских p-подгрупп симметрических групп. Установлены условия связности соответствующих графов, а также даны оценки диаметров для связных графов.

Ключевые слова и фразы: граф коммутативности, сплетение групп подстановок, силовская p-подгруппа, симметрическая группа.

Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого, Черкассы, Украина
E-mail: ylesch@ua.fm (Лещенко Ю.Ю.), zorialv@gmail.com (Зоря Л.В.)

Введение

Граф без петель и кратных ребер, вершинами которого являются нецентральные элементы неабелевой группы G и две вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда они коммутируют, называется графом коммутативности (англ. commuting graph) группы G. Дополнение к графу коммутативности называется графом некоммутативности. Можно изучать разные аспекты влияния свойств данных графов на строение группы.

Один из естественных вопросов: какие общие свойства сохраняют группы, имеющие изоморфные графы коммутативности? Например, известно, что если G — конечная неабелева нильпотентная группа, группы G и H имеют изоморфные графы коммутативности и одинаковые порядки, то H также нильпотентна [1]. В то же время граф коммутативности не определяет порядок конечной группы, т. е. существуют конечные группы разных порядков с изоморфными графами коммутативности (соответствующий пример приведен в [10]).

Отдельный интерес представляет изучение свойств самих графов коммутативности (или их дополнений) для разных классов конечных групп. С этой точки зрения, как правило, исследуются связность графов коммутативности и некоторые их числовые характеристики (например, диаметр или кликовое число). В частности, авторами статьи [6]

2010 *Mathematics Subject Classification:* 20B35, 20D20, 20E22, 20G15.

в 2008 году сформулировано следующие предположение: существует такое натуральное число d, что если конечная неабелева группа имеет связный граф коммутативности, то диаметр данного графа не превышает d. Данное предположение опровергнуто в 2012 году путем построения бесконечного семейства специальных конечных 2-групп, имеющих связные графы коммутативности как угодно большого диаметра [7]. Следует заметить, что аналогичное утверждение в классе полугрупп тоже неверно, т. е. существуют полугруппы со связными графами коммутативности как угодно большого диаметра [5]. Критерии связности графов коммутативности, а также оценки диаметров связных графов представлены, например, в [6] (для симметрических и знакопеременных групп), [2], [3], [4] (для некоторых классов линейных групп).

В данной статье изучаются свойства графов коммутативности силовских p-подгрупп симметрических групп. В первом разделе представлены необходимые вспомогательные сведения. Во втором — определены условия связности графов коммутативности итерированных сплетений циклических групп простого порядка, а также силовских p-подгрупп конечных симметрических групп, даны оценки диаметров для связных графов коммутативности. Основные результаты:

1) *граф коммутативности группы* $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p$ *несвязный* (теорема 2);

2) *при* $n \geq 3$ *граф коммутативности группы* $\wr_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_p$ *связный и его диаметр не превышает* 4 (теорема 3);

3) *если граф коммутативности силовской p-подгруппы симметрической группы связный, то его диаметр не превышает* 4 (теорема 4).

1 Необходимые вспомогательные сведения

1.1. *Силовская p-подгруппа симметрической группы* S_{p^n}, $n \in \mathbb{N}$. Символом $\mathbb{Z}_p$ будем обозначать поле вычетов по простому модулю p. Рассмотрим аддитивную группу $\mathbb{Z}_p$ и будем считать, что $\mathbb{Z}_p$ действует на себе правыми сдвигами, т. е. $x^a = x + a$, где x^a — образ x под действием a. Тогда *n-итерированное сплетение* группы $\mathbb{Z}_p$ (как группы подстановок)

$$\mathcal{P}_{p,n} = \underbrace{\mathbb{Z}_p \wr \ldots \wr \mathbb{Z}_p}_{n} = \wr_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_p^{(i)}, \quad \mathbb{Z}_p^{(i)} \simeq \mathbb{Z}_p,$$

можно определить как группу, элементы которой — это всевозможные таблицы вида

$$[a_1, a_2(x_1), \ldots, a_n(x_1, \ldots, x_{n-1})], \tag{1}$$

где $a_1 \in \mathbb{Z}_p$, $a_i(x_1, \ldots, x_{i-1}) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_{i-1}]/\langle x_1^p - x_1, \ldots, x_{i-1}^p - x_{i-1}\rangle$ ($a_i(x_1, \ldots, x_{i-1})$ — приведенный по модулю идеала $\langle x_1^p - x_1, \ldots, x_{i-1}^p - x_{i-1}\rangle$ многочлен над $\mathbb{Z}_p$). Таблицы из $\mathcal{P}_{p,n}$ действуют на $\mathbb{Z}_p^n$ следующим образом: если $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}_p^n$ и u — таблица вида (1), то

$$t^u = (t_1 + a_1, t_2 + a_2(t_1), \ldots, t_n + a_n(t_1, \ldots, t_{i-1})). \tag{2}$$

Группа $\mathcal{P}_{p,n}$ изоморфна силовской p-подгруппе симметрической группы S_{p^n} степени p^n (см., напр., [11], стр. 104-105, теорема 3.3.3). Строение $\mathcal{P}_{p,n}$ детально изучено в [9]. В частности, имеет место следующие утверждение (доказательство можно найти в [11], с. 115, теорема 3.4.8).

Предложение 1.1. *Центр группы $\mathcal{P}_{p,n}$ — циклическая группа порядка p, состоящая из всевозможных таблиц вида $[0,\ldots,0,a]$, где $a \in \mathbb{Z}_p$.*

Введем дополнительные обозначения. Пусть $[u]_i = a_i(\overline{x}_{i-1}) = a_i(x_1,\ldots,x_{i-1})$ называется *i-й координатой* (или *i-м координатным многочленом*) таблицы u, $[a_i(\overline{x}_{i-1})]_{i=1}^n$ будет сокращенным обозначением для таблиц вида (1), а $u_k = [a_1, a_2(\overline{x}_1),\ldots,a_k(\overline{x}_{k-1})]$ — *k-м отрезком таблицы* u ($k \leq n$). Символом $f(\overline{x}_k^{u_k})$ обозначим многочлен, который получается после приведения многочлена $f(\ldots,x_i + a_i(x_1,\ldots,x_{i-1}),\ldots)$. Тогда, согласно действию (2) группы $\mathcal{P}_{p,n}$ на $\mathbb{Z}_p^n$, если $u = [a_i(\overline{x}_{i-1})]_{i=1}^n$ и $v = [b_i(\overline{x}_{i-1})]_{i=1}^n$, то

$$uv = [a_i(\overline{x}_{i-1}) + b_i(\overline{x}_{i-1}^{u_{i-1}})]_{i=1}^n. \tag{3}$$

Нам будут необходимы следующие свойства многочленов и таблиц.

Лемма 1.1 ([9], лемма 5). *Пусть $u \in \mathcal{P}_{p,n}$. Приведенный многочлен $a(\overline{x}_k)$ будет решением уравнения $f(\overline{x}_k^{u_k}) - f(\overline{x}_k) = 0$ тогда и только тогда, когда функция $a(\overline{x}_k)$ постоянна на областях транзитивности таблицы u_k. В частности, если u_k имеет порядок p^k, т. е. u_k действует транзитивно на $\mathbb{Z}_p^k$, то единственным решением будет $a(\overline{x}_k) = const \in \mathbb{Z}_p$.*

1.2. *Унитреугольная группа матриц.* Пусть $GL_n(\mathbb{F})$ — полная линейная группа над полем $\mathbb{F}$. Матрица $A = (a_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{F})$ называется *унитреугольной* (верхней унитреугольной), если $a_{ij} = \delta_{ij}$ при $i \geq j$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Центр группы $UT_n(\mathbb{F})$ — это циклическая группа, состоящая из унитреугольных матриц $A = (a_{ij})$, для которых $a_{ij} = 0$ при $0 < j - i < n-1$. Другими словами, элементы $\mathcal{Z}(UN_n(\mathbb{F}))$ — это унитреугольные матрицы с $n-2$ нулевыми диагоналями над главной (при этом a_{1n} — произвольный элемент поля $\mathbb{F}$).

1.3. *Силовские p-подгруппы симметрических групп.* Пусть $n \in \mathbb{N}$, p — простое число, S_n — симметрическая группа степени n (группа всех биекций на множестве из n элементов).

Теорема 1. *Если $n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_m p^m$ ($0 \leq a_i < p$, $i = \overline{1,m}$) — представление натурального числа n в системе исчисления по основанию p, то силовская p-подгруппа симметрической группы степени n изоморфна прямому произведению $\mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \times \mathcal{P}_{p,2}^{a_2} \times \ldots \times \mathcal{P}_{p,m}^{a_m}$ силовских p-подгрупп симметрических групп степеней $p, p^2, \ldots, p^m$.*

Доказательство см., напр. [11], стр. 104 (следствие 3.3.2).

1.4. *Граф коммутативности неабелевой группы.* Пусть G — некоммутативная группа с центром $\mathcal{Z}(G)$. Рассмотрим неориентированный граф $\Gamma(G)$ с множеством вершин $V_\Gamma = G \setminus \mathcal{Z}(G)$. Две различные вершины $x, y \in V_\Gamma$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $xy = yx$ (x и y перестановочны в G). Граф $\Gamma(G)$ называется *графом коммутативности* группы G.

Напомним, что две вершины называются связными в некотором графе, если существует путь, соединяющий эти вершины. Бинарное отношение связности является отношением эквивалентности и разбивает множество вершин графа на классы, которые называют *компонентами связности*. Граф называется *связным*, если он имеет всего одну компоненту связности.

Расстоянием $\rho_\Gamma(x,y)$ между двумя вершинами x, y в графе Γ называется длина кратчайшего пути, соединяющего вершины x и y. *Диаметром* конечного связного графа Γ называется величина $\operatorname{diam}(\Gamma) = \max\{\rho_\Gamma(x,y) \mid x,y \in V_\Gamma\}$. Если x и y принадлежат разным компонентам связности графа Γ, то будем считать, что $\rho_\Gamma(x,y) = \infty$. Диаметр несвязного графа также считается равным ∞. Тот факт, что x и y соединены ребром в $\Gamma(G)$ ($\rho_\Gamma(x,y) = 1$) или элементы x, y коммутируют в группе G ($xy = yx$), будем обозначать следующим образом: $x \sim y$.

Лемма 1.2 ([8], теорема 1.2). *Пусть $G = A \times B$.*
1) Если A и B — неабелевы группы, то $\operatorname{diam}(\Gamma_G) \leq \min\{3, d(\Gamma_A), d(\Gamma_B)\}$.
2) Если одна из групп A или B (например, B) — абелева, то $\operatorname{diam}(\Gamma_G) = d(\Gamma_A)$.

Оценку, данную в пункте 1) леммы 1.2, можно уточнить.

Следствие 1.1. *Если A и B — неабелевы группы и граф коммутативности каждой из них имеет диаметр не меньше 3, то $\operatorname{diam}(\Gamma(A \times B)) = 3$.*

Лемму 1.2 и следствие 1.1 можно обобщить на произвольное конечное число сомножителей.

2 Основные результаты

2.1. *Граф коммутативности группы* $\wr_{i=1}^n \mathbb{Z}_p$. Строение графа коммутативности группы $\mathcal{P}_{p,n} = \wr_{i=1}^n \mathbb{Z}_p$ существенным образом зависит от кратности сплетения. Рассмотрим сначала случай сплетения двух циклических групп простого порядка: $\mathcal{P}_{p,2} = \mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p$.

Теорема 2. *Граф коммутативности группы $\mathcal{P}_{p,2} = \mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p$ несвязный.*

Доказательство. Базой сплетения $\mathcal{P}_{p,2}$ является подгруппа B, состоящая из всевозможных таблиц вида $[0, a_2(x_1)]$, где $a_2(x_1) \in \mathbb{Z}_p[x_1]/\langle x_1^p - x_1\rangle$. Докажем, что элементы из $B \setminus \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,2})$ ($\mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,2})$ — центр группы $\mathcal{P}_{p,2}$, который состоит из таблиц вида $[0,a]$, где $a \in \mathbb{Z}_p$) перестановочны в $\mathcal{P}_{p,2}$ только с элементами из B.

Пусть $u = [0, a_2(x_1)] \in B \setminus \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,2})$, $v = [b_1, b_2(x_1)] \in \mathcal{P}_{p,2}$. Тогда

$$uv = [b_1, a_2(x_1) + b_2(x_1)], \qquad vu = [b_1, b_2(x_1) + a_2(x_1 + b_1)].$$

Откуда $a_2(x_1) = a_2(x_1 + b_1)$ для всех $x_1 \in \mathbb{Z}_p$. Возможны два случая.

Случай 1. Если $b_1 \neq 0$, то $a_2(x_1) = \mathrm{const}$ и $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,2})$ — противоречие.

Случай 2. Если $b_1 = 0$, то $v \in B$. □

Теорема 3. *При $n \geq 3$ граф коммутативности группы $\mathcal{P}_{p,n}$ связный и $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})) \leq 4$.*

Доказательство. Пусть таблица $u = [a_i(\overline{x}_{i-1})]_{i=1}^n$ — произвольный нецентральный элемент группы $\mathcal{P}_{p,n}$ (по предложению 1.1 центр группы $\mathcal{P}_{p,n}$ состоит из всевозможных таблиц вида $[0,\ldots,0,a]$, $a \in \mathbb{Z}_p$). Зафиксируем таблицу $w = [0,\ldots,0,x_1] \in \mathcal{Z}_2(\mathcal{P}_{p,n}) \setminus \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,n})$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в $\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})$ существует путь от u до w, длина которого не превышает 2.

Случай 1. Пусть $a_1 = 0$ и $u = [0, a_2(\overline{x}_1),\ldots,a_n(\overline{x}_{n-1})]$. Непосредственные вычисления показывают, что $uw = wu$, т. е. в $\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})$ существует путь $u \sim w$ длины 1.

Случай 2. Пусть $a_1 \neq 0$. Возможны следующие варианты.

Случай 2.1: $u^p \notin \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,n})$. Тогда u^p имеет нулевую первую координату. Так как $u \sim u^p$ и $u^p \sim w = [0,\dots,0,x_1]$, то $\rho_{\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})}(u,w) \le 2$.

Случай 2.2: $u^p \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,n})$. Тогда $|u| \le p^2$, так как центр — циклическая подгруппа порядка p. Более того, поскольку $u^p = [0,\dots,0,a]$, то $u^p_{n-1} = [0,\dots,0]$, т. е. u_{n-1} имеет порядок p.

Рассмотрим таблицу $z = [0,\dots,0,f_n(\overline{x}_{n-1})]$. Тогда

$$\begin{aligned} uz &= [a_1,a_2(\overline{x}_1),\dots,a_{n-1}(\overline{x}_{n-2}),a_n(\overline{x}_{n-1}) + f_n(\overline{x}^{u_{n-1}}_{n-1})],\\ zu &= [a_1,a_2(\overline{x}_1),\dots,a_{n-1}(\overline{x}_{n-2}),f_n(\overline{x}_{n-1}) + a_n(\overline{x}_{n-1})].\end{aligned}$$

Для того, чтобы $uz = zu$ необходимо выполнение равенства $a_n(\overline{x}_{n-1}) + f_n(\overline{x}^{u_{n-1}}_{n-1}) = f_n(\overline{x}_{n-1}) + a_n(\overline{x}_{n-1})$ или

$$f_n(\overline{x}^{u_{n-1}}_{n-1}) - f_n(\overline{x}_{n-1}) = 0. \tag{4}$$

Так как u_{n-1} имеет порядок p, то ее области транзитивности на $\mathbb{Z}_p^{n-1}$ имеют размер не превосходящий p. С другой стороны, по условию теоремы $n \ge 3$ (т. е. $n-1 \ge 2$) и множество $\mathbb{Z}_p^{n-1}$ содержит не менее p^2 элементов. Значит, u_{n-1} имеет более одной орбиты (области транзитивности). Следовательно, по лемме 1.1 уравнение (4) имеет решения, отличные от константы.

Таким образом, найдется такое z, что $z \notin \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,n})$, $zu = uz$ и первая координата z равна 0. Значит, в $\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})$ существует путь $u \sim z \sim w = [0,\dots,0,x_1]$ длины 2.

Итак, любая таблица из $\mathcal{P}_{p,n} \setminus \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,n})$ соединяется в графе коммутативности $\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})$ с таблицей $w = [0,\dots,0,x_1]$ путем, длина которого не превышает 2. Следовательно, $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})) \le 4$. □

Лемма 2.1. *Если* $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) \ge 3$, *то* $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathbb{Z}_p \wr G)) \ge 3$.

Доказательство. Напомним, что

$$\mathbb{Z}_p \wr G = \{[g,h(x)] \mid g \in \mathbb{Z}_p, h(x) : \mathbb{Z}_p \to G\}.$$

Пусть $a,b \in G \setminus \mathcal{Z}(G)$, $\rho_{\Gamma(G)}(a,b) \ge 3$ и

$$a(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x = 0,\\ 1_G, & \text{если } x \ne 0;\end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x = 0,\\ 1_G, & \text{если } x \ne 0;\end{cases}$$

где 1_G — нейтральный елемент группы G.

Предположим, что в $\Gamma(\mathbb{Z}_p \wr G)$ расстояние между элементами $u = [1,a(x)]$ и $v = [1,b(x)]$ меньше 3. Очевидно, что $uv \ne vu$, так как из $u \sim v$ следует, что $a \sim b$ в G. Пусть в $\mathbb{Z}_p \wr G$ существует таблица $w = [c,d(x)]$ такая, что $u \sim w \sim v$ (т. е. $\rho_{\Gamma(\mathbb{Z}_p \wr G)}(u,v) = 2$). Тогда из равенства $uw = wu$ (в частности, $[uw]_2 = [wu]_2$) по правилу умножения таблиц следует

$$a(x)\cdot d(x+1) = d(x)\cdot a(x+c) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{Z}_p. \tag{5}$$

Аналогично из $vw = wv$ следует

$$b(x)\cdot d(x+1) = d(x)\cdot b(x+c) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{Z}_p. \tag{6}$$

Возможны два случая.

Случай 1. Если $c = 0$, то при всех $x \ne 0$ равенство (5) принимает вид $d(x) = d(x+1)$. Это означает, что $d(1) = d(2) = \dots = d(p) = d(0)$, т. е. $d(x) = d \in G$ при всех $x \in \mathbb{Z}_p$. При $x = 0$ равенство (5) принимает вид $ad = da$, то есть $a \sim d$ в G. Аналогично, из равенства (6) при $x = 0$ следует, что $d \sim b$ в G. Так как $\rho_{\Gamma(G)}(a,b) \ge 3$, то $d \in \mathcal{Z}(G)$. Но тогда $w \in \mathcal{Z}(\mathbb{Z}_p \wr G)$.

Случай 2. Если $c \ne 0$, то при $x = 0$ из (5) и (6) следует соответственно $a\cdot d(1) = d(0)$ и $b\cdot d(1) = d(0)$. Откуда получаем $a\cdot d(1) = b\cdot d(1)$ или $a = b$, что противоречит выбору элементов a и b. □

Предложение 2.1. $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})) \ge 3$.

Доказательство. Рассмотрим группу $\mathcal{P}_{p,2} = [g,h(x) \mid g \in \mathbb{Z}_p, h(x) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p]$. Пусть $u = [1,x^{p-1}]$ и $v = [1,1]$. Покажем, что $\rho(u,v) > 2$.

Действительно, если $[a,b(x)] \sim v$, то $b(x+1) = b(x)$ при всех $x \in \mathbb{Z}_p$. Другими словами, v перестановочна только с таблицами вида $w = [a,b]$, где $a,b \in \mathbb{Z}_p$. С другой стороны, если $w \sim u$, то $b + (x+a)^{p-1} = x^{p-1} + b$ или $(x+a)^{p-1} = x^{p-1}$ при всех $x \in \mathbb{Z}_p$. Последнее возможно только, когда $a = 0$. Но тогда $w \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,2})$. Следовательно, $\rho(u,v) > 2$.

Применив метод математической индукции и лему 2.1, получаем нужное нам утверждение. □

Верхняя оценка диаметров итерированных сплетений, данная в теореме 3, не может быть улучшена, про что свидетельствует следующий пример.

Пример 1. *Пусть* $u = [1,x_1,x_1x_2]$ *и* $v = [1,1,x_1x_2]$. *Тогда* $\rho_{\Gamma(\mathcal{P}_{2,3})}(u,v) = 4$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $uv \ne vu$. Путь $u_0 \in \mathcal{P}_{2,3}$ такая, что $u_0 \sim u$. Тогда, сравнивая соответствующие координатные многочлены таблиц uu_0 и u_0u, получаем ограничения:

$$u_0 = [a, b + ax_1, c + abx_1 + bx_2 + ax_1x_2], \quad \text{где } a,b,c \in \mathbb{Z}_2.$$

Аналогично, если v_0 перестановочна с v, то

$$v_0 = [l, l, d + kx_1 + kx_2 + lx_1x_2], \quad \text{где } d,k,l \in \mathbb{Z}_2.$$

Если $u_0v_0 = v_0u_0$, то из равенства вторых координатных многочленов таблиц u_0v_0 и v_0u_0 следует, что $al = 0$. Возможны два случая.

Случай 1. Если $a = 0$, то $u_0 = [0, b, c + bx_2]$. Сравнивая третьи координатные многочлены u_0v_0 и v_0u_0 получаем, что либо $b = 0$ (и тогда $u_0 \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{2,3})$), либо $b \ne 0$ (но тогда $k = l = 0$ и $v_0 \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{2,3})$).

Случай 2. Если $l = 0$, то $v_0 = [0,0,d + kx_1 + kx_2]$. Тогда из равенства третьих координатных многочленов таблиц u_0v_0 и v_0u_0 следует, что $k = 0$. Т. е. $v_0 \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{2,3})$. □

В группе $\mathcal{P}_{p,n}$ естественным образом выделяется подгруппа, состоящая из тех и только тех таблиц, координатные многочлены которых — однородные линейные полиномы. Эта подгруппа изоморфна группе $UT_n(\mathbb{Z}_p)$ унитреугольных матриц над полем $\mathbb{Z}_p$. Условия связности графов коммутативности унитреугольных групп над полем вычетов $\mathbb{Z}_p$ (p — простое), а также оценки их диаметров приведены в [8]. Если $n \ge 4$, то граф коммутативности группы $UT_n(\mathbb{Z}_p)$ связный и имеет диаметр равный 3, а граф коммутативности группы $UT_3(\mathbb{Z}_p)$ — несвязный (см. [8], утверждение 4.1).

Рассмотрим строение графа $\Gamma(UT_3(\mathbb{F}))$, где $\mathbb{F}$ — произвольное конечное поле, более детально.

Пример 2. *Если $\mathbb{F}$ — конечное поле и $|\mathbb{F}| = q$, то граф коммутативности $\Gamma(UT_3(\mathbb{F}))$ группы $UT_3(\mathbb{F})$ несвязный и имеет $q+1$ компоненту связности, каждая из которых — полный подграф на $q^2 - q$ вершинах;*

Доказательство. Пусть $A, B \in UT_3(\mathbb{F})$:

$$A = E + \underbrace{a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{23}E_{23}}_{\Sigma_a} \quad \text{и} \quad B = E + \underbrace{b_{12}E_{12} + b_{13}E_{13} + b_{23}E_{23}}_{\Sigma_b},$$

где E — единичная матрица, E_{ij} — матричная единица (т. е. нулевая матрица, с 1 на пересечении i-й строки и j-го столбца).

Случай 1. Если $a_{12} = 0$ и $a_{23} \neq 0$, то

$$AB = E + \Sigma_b + a_{13}E_{13} + a_{23}E_{23}, \qquad BA = E + \Sigma_b + a_{13}E_{13} + a_{23}E_{23} + a_{23}b_{12}E_{13}.$$

Тогда из $AB = BA$ следует, что $a_{23}b_{12} = 0$, т. е. $b_{12} = 0$. Это означает, что матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{где } * \text{ — произвольный элемент поля } \mathbb{F}, \tag{7}$$

перестановочны только с матрицами вида (7). Множество таких матриц, за исключением матриц принадлежащих центру группы (центр группы $UT_3(\mathbb{F})$ содержит q элементов), формирует компоненту связности $\mathcal{C}_0$ в $\Gamma(UT_3(F))$, $|\mathcal{C}_0| = q^2 - q$.

Случай 2. Аналогично, если $a_{12} \neq 0$ и $a_{23} = 0$, то матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{где } * \text{ — произвольный элемент поля } \mathbb{F},$$

(за исключением центра) образуют еще одну компоненту связности $\mathcal{C}_q$, $|\mathcal{C}_0| = |\mathcal{C}_q|$.

Случай 3. Если $a_{12} \neq 0$ и $a_{23} \neq 0$, то

$$AB = E + \Sigma_b + \Sigma_b + a_{12}b_{23}E_{13} \quad \text{и} \quad BA = E + \Sigma_b + \Sigma_b + b_{12}a_{23}E_{13}.$$

Из условия $AB = BA$ следует, что $a_{23}b_{12} = b_{23}a_{12}$. Если $b_{12} = 0$, то и $b_{23} = 0$. Это означает, что $B \in \mathcal{Z}(UT_3(\mathbb{F}))$. Если $b_{12} \neq 0$ и $b_{23} \neq 0$, то

$$\frac{a_{12}}{a_{23}} = \frac{b_{12}}{b_{23}} = k \neq 0. \tag{8}$$

Т. е. матрицы с двумя ненулевыми элементами над главной диагональю перестановочны только с матрицами, соответствующие элементы которых удовлетворяют (8). Матрицы такого вида формируют компоненту связности $\mathcal{C}_k$, $k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, где $|\mathcal{C}_k| = q^2 - q$. Число таких компонент связности равно $q - 1$ (по числу ненулевых элементов поля $\mathbb{F}$).

Таким образом, общее количество компонент связности равно $q + 1$. □

2.2. *Граф коммутативности силовских p-подгрупп симметрических групп.* Оценки диаметров графов коммутативности силовских p-подгрупп симметрических групп представлены в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{P}$ — силовская p-подгруппа группы S_n. Тогда*

1) *если $n < p^2$, то $\mathcal{P}$ — абелева группа;*

2) *если $p^2 \leq n < 2p^2$, то граф коммутативности $\Gamma(\mathcal{P})$ группы $\mathcal{P}$ несвязный;*

3) *если $n = a_0 + a_1 p + p^k$, где $0 \leq a_0, a_1 < p$, а $k \geq 3$, то граф коммутативности $\Gamma(\mathcal{P})$ группы $\mathcal{P}$ связный и $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P})) \leq 4$;*

4) *иначе — граф коммутативности $\Gamma(\mathcal{P})$ группы $\mathcal{P}$ связный и* $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P})) = 3$.

Доказательство. 1) Если $n < p^2$, то $n = a_0 + a_1 p$, где $0 \leq a_0, a_1 < p$. По теореме 1 силовская p-подгруппа группы S_n изоморфна прямому произведению $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \simeq \mathbb{Z}_p^{a_1}$ — абелева группа.

2) Если $p^2 \leq n < 2p^2$, то $n = a_0 + a_1 p + p^2$, где $0 \leq a_0, a_1 < p$. По теореме 1 силовская p-подгруппа группы S_n изоморфна прямому произведению $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \times \mathcal{P}_{p,2}$. По лемме 1.2

$$\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P})) = \operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \times \mathcal{P}_{p,2})) = \operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,2})) = \infty,$$

т. е., граф $\Gamma(\mathcal{P})$ — несвязный.

3) Если $n = a_0 + a_1 p + p^k$, где $0 \leq a_0, a_1 < p$, а $k \geq 3$, то $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \times \mathcal{P}_{p,k}$ и

$$\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P})) = \operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \times \mathcal{P}_{p,k})) = \operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,k})) \leq 4.$$

4) В остальных случаях $\mathcal{P}$ будет представлена прямым произведением как минимум двух неабелевых подгрупп, диаметры графов коммутативности которых (согласно предложению 2.1) не меньше 3. Используя следствие 1.1, получаем $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P})) = 3$. □

3 Выводы и обсуждения

Гипотеза о существовании ограничения на величину диаметров графов коммутативности косвенно подтверждалась наличием такого предела в классах многих конечных групп [2], [3], [4], а также ограниченностью диаметров соответствующих графов для симметрических групп [6]. Аналогичная ситуация возникает при изучении p-групп: диаметры графов коммутативности силовских p-подгрупп симметрических групп не превышают 4 (теоремы 3 и 4), но при этом все подгруппы бесконечной серии (предложенной в [7]) с возрастающими диаметрами являются 2-группами (нильпотентыми класса 2). Многие классы подгрупп группы $\mathcal{P}_{p,n}$ описаны детально (например, в терминах таблиц [9]). Поэтому возникает естественная проблема поиска тех условий, при которых классы подгрупп группы $\mathcal{P}_{p,n}$ будуть иметь ограничения на величину диаметров соответствующих графов коммутативности.

References

[1] Abdollahi A., Akbari S., Maimani H.R. *Non-commuting graph of a group.* J. Algebra 2006, **298** (2), 468–492. doi:10.1016/j.jalgebra.2006.02.015

[2] Akbari S., Bidkhori H., Mohammadian A. *Commuting Graphs of matrix algebras.* Comm. in Algebra 2008, **36** (11), 4020–4031. doi:10.1080/00927870802174538

[3] Akbari S., Mohammadian A., Radjavi H., Raja P. *On the diameters of commuting graphs*. Linear Algebra Appl. 2006, **418** (1), 161–176. doi:10.1016/j.laa.2006.01.029

[4] Akbari S., Raja P. *Commuting graphs of some subsets in simple rings*. Linear Algebra Appl. 2006, **416** (2–3), 1038–1047. doi:10.1016/j.laa.2006.01.006

[5] Araujo J., Kinyon M., Konieczny J. *Minimal paths in the commuting graphs of semigroups*. Eur. J. Comb. 2011, **32** (2), 178–197. doi:10.1016/j.ejc.2010.09.004

[6] Iranmanesh A., Jafarzadeh A. *On the commuting graph associated with the symmetric and alternating groups*. J. Algebra Appl. 2008, **7** (1), 129–146. doi:10.1142/S0219498808002710

[7] Giudici M., Parker C. There is no upper bound for the diameter of the commuting graph of a finite group. arXiv 2012. http://arxiv.org/abs/1210.0348v1

[8] Guidici M., Pope A. On bounding the diameter of the commuting graph of a group. arXiv 2012. http://arxiv.org/abs/1206.3731v2

[9] Kaloujnine L. *La structure des p-groupes de Sylow des groupes symetriques finis*. Ann. Sci. l'Ecole Norm. Super. 1948, **65** (3), 239–276.

[10] Moghaddamfar A.R. *About noncommuting graphs*. Siberian Math. J. 2006, **47** (5), 911–914. doi:10.1007/s11202-006-0101-y

[11] Sushchansky V.I., Sikora V.S. Operations on the permutation groups. Ruta, Chernivci, 2003. (in Ukrainian)

Поступило 29.06.2012

Leshchenko Yu.Yu., Zoria L.V. *On diameters estimations of the commuting graphs of Sylow p-subgroups of the symmetric groups*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 70–78.

The commuting graph of a group G is an undirected graph whose vertices are non-central elements of G and two distinct vertices x, y are adjacent if and only if $xy = yx$. This article deals with the properties of the commuting graphs of Sylow p-subgroups of the symmetric groups. We define conditions of connectedness of respective graphs and give estimations of the diameters if graph is connected.

Key words and phrases: commuting graph, wreath product, Sylow p-subgroup, symmetric group.

Лещенко Ю.Ю., Зоря Л.В. *Оцінки діаметрів графів комутативності силовських р-підгруп симетричних груп* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 70–78.

Графом комутативності скінченної неабелевої групи G називається граф, вершинами якого є нецентральні елементи групи G та дві різні вершини x, y з'єднуються ребром тоді і тільки тоді, коли $xy = yx$. У статті досліджено властивості графів комутативності силовських p-підгруп симетричних груп. Встановлені умови зв'язності відповідних графів, а також наведені оцінки діаметрів для зв'язних графів.

Ключові слова і фрази: граф комутативності, вінцевий добуток груп підстановок, силовська p-підгрупа, симетрична група.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.51

МАСЛЮЧЕНКО В.К., НЕСТЕРЕНКО В.В.

СЛАБКА ВЛАСТИВІСТЬ ДАРБУ І ПЕРЕХІДНІСТЬ ЛІНІЙНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ У ТОПОЛОГІЧНИХ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРАХ

Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. *Слабка властивість Дарбу і перехідність лінійних відображень у топологічних векторних просторах* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 79–88.

Показано, що кожне лінійне відображення в топологічних векторних просторах завжди має слабку властивість Дарбу, отже, буде неперервним тоді і лише тоді, коли воно перехідне. Для скінченновимірного відображення f зі значеннями у гаусдорфовому топологічному векторному просторі наступні умови еквівалентні: (i) f неперервне; (ii) графік f замкнений; (iii) ядро f замкнене; (iv) f перехідне.

Ключові слова і фрази: лінійне відображення, властивість Дарбу, перехідне відображення, замкнений графік, замкнене ядро.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

1 ВСТУП

Вихідним пунктом досліджень даної праці є класична теорема Банаха про замкнений графік [1, с. 35], яка у спрощеному вигляді формулюється так: для довільних банахових просторів X і Y кожне лінійне відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком є неперервним. Пізніше з'явилося багато результатів про неперервність відображень із замкненим графіком, які задовольняють різні додаткові умови. Одним з них є результат з [3], де доведено, що кожна неперервна за Стеллінґзом функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною. Для цього у згаданій статті введено новий клас функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що дістали назву перехідних, та з'ясовано, що він містить клас функцій із замкненим графіком і що кожна перехідна неперервна за Стеллінґзом функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною.

Поняття перехідності було узагальнено в праці [7] на відображення $f : X \to Y$, що діють у довільних топологічних просторах. Там же у вступі було зібрано відомі авторам результати про декомпозицію неперервності, в яких однією з умов виступає замкненість графіка. При цьому виникло природне бажання з'ясувати, в яких із цих результатів замкненість графіка може бути замінена на перехідність, що дає цілу програму для майбутніх досліджень.

Нехай X і Y — топологічні простори. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ називається перехідним у точці x_0 з X, якщо для кожного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ у просторі Y існують окіл U точки x_0 в X і відкритий окіл W точки y_0 в Y такі, що $W \subseteq V$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 46A30.

і $f(U) \subseteq W \cup (Y \setminus \overline{W})$. Відображення називають перехідним, якщо воно перехідне у кожній точці x з X.

Відомо [7, теор. 6]: *якщо X — топологічний простір, Y — гаусдорфовий локально компактний простір і $f : X \to Y$ — відображення із замкненим графіком, то f — перехідне відображення.* (Теорема А).

Кажуть, що відображення $f : X \to Y$ має *слабку властивість Дарбу*, якщо образ $f(G)$ кожної області G в X (тобто зв'язної і відкритої в X множини) є зв'язною множиною у просторі Y.

Наступний результат про декомпозицію неперервності ([7, теор. 5 і 16] та [2, с. 518]) був першим кроком у реалізації вказаної вище програми: *якщо X — локально зв'язний простір, Y — топологічний простір, то відображення $f : X \to Y$ є неперервним відображенням тоді і тільки тоді, коли воно перехідне і має слабку властивість Дарбу.* (Теорема В).

Ця теорема покращує як один результат роботи [9], де замість перехідності вимагалося наявність замкненого графіка, а замість слабкої властивості Дарбу — звичайна властивість Дарбу, так і результат праці [8], де замість перехідності розглянуто сильнішу властивість.

У цій роботі ми досліджуємо лінійні відображення $f : X \to Y$, де X і Y — довільні топологічні векторні простори (ТВП). Виявляється, що кожне таке відображення має слабку властивість Дарбу. Тому з теореми про декомпозицію неперервності негайно випливає, що лінійні відображення $f : X \to Y$ будуть перехідними тоді і тільки тоді, коли вони неперервні. Втім, неперервність перехідного лінійного відображення в ТВП легко встановлюється і безпосередньо на основі того, що в довільному ТВП існує база заокруглених околів нуля.

Нескладно перевірити, що для гаусдорфового ТВП Y скінченновимірні лінійні відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком обов'язково перехідні, а значить, неперервні, зокрема, неперервними будуть і лінійні функціонали $f : X \to \mathbb{K}$ із замкненим графіком. Виявляється, що замкненість графіка лінійного функціонала f рівносильна замкненості його ядра $ker f$. Тому отриманий результат еквівалентний відомому критерію неперервності лінійного функціонала в термінах його ядра [4, с. 15]. Ми встановлюємо також, що для скінченновимірних лінійних відображень $f : X \to Y$ наступні умови еквівалентні: (i) f неперервне; (ii) ядро f замкнене; (iii) графік f замкнений.

2 ЛАМАНО ЗВ'ЯЗНІ МНОЖИНИ У ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРАХ

Символом $\mathbb{K}$ позначимо поле $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел чи поле $\mathbb{C}$ всіх комплексних чисел. Нехай X — векторний простір над полем $\mathbb{K}$ і a, b — вектори з X. Відображення $\omega : \mathbb{R} \to X$, яке задається формулою $\omega(t) = ta + b$ ми називатимемо *лінійною функцією*. Для точок x_1 і x_2 з X, невиродженого відрізка $[\alpha, \beta]$ числової прямої і лінійної функції $\omega(t) = ta + b$ звуження $\omega|_{[\alpha,\beta]}$, для якого $\omega(\alpha) = x_1$ і $\omega(\beta) = x_2$, назвемо *прямолінійним шляхом, що з'єднує точки x_1 і x_2*.

Лема 2.1. *Для будь-яких точок x_1 і x_2 з векторного простору X і невиродженого відрізка $[\alpha, \beta]$ існує єдиний прямолінійний шлях $\omega : [\alpha, \beta] \to X$, який з'єднує точки x_1 і x_2.*

Доведення. Розглянемо стандартний прямолінійний шлях $\omega_0(\lambda) = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, $0 \le \lambda \le 1$, що з'єднує точки x_1 і x_2, лінійну функцію γ, що переводить відрізок $[\alpha, \beta]$ у відрізок $[0,1]$, яка задається формулою $\gamma(t) = \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}$, і їх композицію $\omega = \omega_0 \circ \gamma$. Зрозуміло, що

$$\omega(t) = \omega_0(\gamma(t)) = ta + b,$$

де $a = \frac{x_2 - x_1}{\beta-\alpha}$ і $b = \frac{\beta x_1 - \alpha x_2}{\beta-\alpha}$, причому

$$\omega(\alpha) = \omega_0(0) = x_1 \qquad і \qquad \omega(\beta) = \omega_0(1) = x_2.$$

Таким чином, ω — прямолінійний шлях, заданий на відрізку $[\alpha, \beta]$, що з'єднує x_1 і x_2.

Нехай $\omega^*(t) = ta^* + b^*$ — довільний прямолінійний шлях на відрізку $[\alpha, \beta]$, який з'єднує точки x_1 і x_2. Тоді $\omega^*(\alpha) = \alpha a^* + b^* = x_1$ і $\omega^*(\beta) = \beta a^* + b^* = x_2$, звідки отримуємо, що $(\beta - \alpha)a^* = x_2 - x_1$, тобто $a^* = \frac{x_2 - x_1}{\beta-\alpha} = a$, і

$$b^* = x_1 - \alpha a^* = x_1 - \alpha\frac{x_2 - x_1}{\beta - \alpha} = \frac{\beta x_1 - \alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_1}{\beta - \alpha} = \frac{\beta x_1 - \alpha x_2}{\beta - \alpha} = b.$$

Отже, $\omega^* = \omega$. □

Нехай $x_0, x_1, \dots, x_n$ — довільні точки векторного простору X і $[\alpha, \beta]$ — невироджений відрізок числової прямої. *Ламана, що породжена точками $x_0, x_1, \dots, x_n$,* — це відображення $l : [\alpha, \beta] \to X$, для якого існує таке розбиття $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, що для кожного $k = 1, \dots, n$ звуження $l|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — це прямолінійний шлях, що з'єднує точки x_{k-1} і x_k.

Лема 2.2. *Нехай X і Y — векторні простори, $f : X \to Y$ — лінійне відображення, $x_0, x_1, \dots, x_n$ — точки з X, $y_k = f(x_k)$ при $k = 0, \dots, n$, $l : [\alpha, \beta] \to X$ — ламана у просторі X, що породжена точками $x_0, \dots, x_n$ з X. Тоді $f \circ l$ — це ламана у просторі Y, що породжена точками $y_0, \dots, y_n$ з Y.*

Доведення. За умовою існує таке розбиття $\alpha = t_0 < \dots < t_n = \beta$, що звуження $l|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — це прямолінійний шлях, який з'єднує точки x_{k-1} і x_k при $k = 1, \dots, n$. Тоді для $k = 1, \dots, n$ існують такі вектори a_k і b_k з X, що $l(t) = ta_k + b_k$ при $t_{k-1} \le t \le t_k$, причому $l(t_{k-1}) = x_{k-1}$ і $l(t_k) = x_k$. З лінійності відображення f випливає, що при $t_{k-1} \le t \le t_k$ для кожного $k = 1, \dots, n$

$$(f \circ l)(t) = f(l(t)) = f(ta_k + b_k) = tf(a_k) + f(b_k)$$

при цьому $(f \circ l)(t_j) = f(l(t_j)) = f(x_j) = y_j$ для кожного $j = 0, \dots, n$. Тому $f \circ l|_{[t_{k-1}, t_k]}$ — це прямолінійний шлях, що з'єднує точки y_{k-1} і y_k в Y, а значить, $f \circ l$ — ламана, що породжена точками $y_0, \dots, y_n$ в Y. □

Точки x_0 і x з підмножини E векторного простору X називатимемо *ламано зв'язними в E* (і позначатимемо $x_0 \overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}} x$), якщо існує така ламана $l : [\alpha, \beta] \to E$ зі значеннями у множині E, що $l(\alpha) = x_0$ і $l(\beta) = x$. Про таку ламану кажуть, що вона з'єднує точки x_0 і x у множині E. Підмножину E векторного простору X назвемо *ламано зв'язною*, якщо будь-які її дві точки є ламано зв'язними в E.

Лема 2.3. *Для будь-якої підмножини E векторного простору X відношення $\overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}}$ ламаної зв'язності в E — це відношення еквівалентності на множині E.*

Доведення. Перевіримо лише транзитивність відношення $\overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}}$, залишивши перевірку рефлексивності і симетричності цього відношення читачеві.

Нехай $x' \overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}} x''$ і $x'' \overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}} x'''$. Покажемо, що $x' \overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}} x'''$. За умовою існують ламана $l' : [\alpha', \beta'] \to E$, що породжується точками $x'_0, \ldots, x'_{n'}$, де $x'_0 = x'$ і $x'_{n'} = x''$, і ламана $l'' : [\alpha'', \beta''] \to E$, що породжується точками $x''_0, \ldots, x''_{n''}$, де $x''_0 = x''$ і $x''_{n''} = x'''$. Розглянемо довільний невироджений відрізок $[\alpha, \beta]$ і лінійні функції γ' і γ'', що переводять відрізок $I' = [\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ у відрізок $[\alpha', \beta']$, а відрізок $I'' = [\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ у відрізок $[\alpha'', \beta'']$. Визначимо функцію $l : [\alpha, \beta] \to E$, покладаючи $l(t) = l'(\gamma'(t))$ при $t \in I'$ і $l(t) = l''(\gamma''(t))$ при $t \in I''$. Нескладно перевірити, що l — це ламана, що породжується точками $x' = x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n'} = x'' = x''_0, x''_1, \ldots, x''_{n''} = x'''$, причому $l([\alpha, \beta]) \subseteq E$. Таким чином, $x' \overset{\wedge}{\underset{E}{\sim}} x'''$. □

Лема 2.4. *Кожна зрівноважена множина у векторному просторі є ламано зв'язною.*

Доведення. Нагадаємо, що множина E — зрівноважена, якщо для кожної точки $x \in E$ і для довільного скаляра λ такого, що $|\lambda| \le 1$, обов'язково виконується $\lambda x \in E$. Оскільки порожня множина автоматично ламано зв'язна, то припустимо, що $E \neq \varnothing$. Тоді існує точка $x_0 \in E$, а з нею і $0 = 0 \cdot x_0 \in E$, адже $|0| = 0 \le 1$.

Розглянемо довільні точки x_1 і x_2 з множини E і функцію

$$l(t) = \begin{cases} (1-2t)x_1, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ (2t-1)x_2, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Оскільки $0 \le 1 - 2t \le 1$ при $0 \le t \le \frac{1}{2}$ і $0 \le 2t - 1 \le 1$ при $\frac{1}{2} \le t \le 1$, то $l(t) \in E$ для всіх $0 \le t \le 1$ на основі зрівноваженості множини E. Звуження l на відрізки $[0, \frac{1}{2}]$ і $[\frac{1}{2}, 1]$ — це лінійні функції, причому $l(0) = x_1$, $l(\frac{1}{2}) = 0$ і $l(1) = x_2$. Таким чином, $l : [0,1] \to E$ — це ламана, що породжена точками x_1, 0 і x_2, яка з'єднує точки x_1 і x_2 у множині E, і тому E — ламано зв'язна множина. □

3 Ламано зв'язні множини у топологічних векторних просторах

Нехай тепер X — це топологічний векторний простір над полем $\mathbb{K}$. Тоді довільна лінійна функція $\omega : \mathbb{R} \to X$, $\omega(t) = ta + b$, буде неперервною, адже додавання і множення на скаляр у ТВП — це неперервні операції. Тому і довільний прямолінійний шлях $\omega : [\alpha, \beta] \to X$ і кожна ламана $l : [\alpha, \beta] \to X$ — це неперервні функції. Звідси негайно випливає, що кожна ламано зв'язна множина в ТВП є лінійно зв'язною, а значить, і зв'язною.

Лема 3.1. *Довільний ТВП X є локально ламано зв'язним простором, тобто в кожному околі довільної точки з X міститься деякий ламано зв'язний окіл цієї ж точки.*

Доведення. Добре відомо [6, с. 14], що зрівноважені околи нуля утворюють базу околів нуля в довільному ТВП, тому в кожному околі нуля в X міститься деякий зрівноважений, а значить, і ламано зв'язний окіл нуля.

Нехай тепер x — довільна точка з X і U_x — її окіл в X. Тоді існує такий окіл нуля U, що $U_x = x + U$. Нехай V — зрівноважений окіл нуля, який міститься в U. За лемою 2.4 він є ламано зв'язним. Таким же буде і його зсув $V_x = x + V$ на вектор x, бо операція зсуву, очевидно, переводить ламані в ламані, адже для лінійної функції $\omega(t) = ta + b$ і функція $\omega(t) + x = ta + b + x$ буде лінійною. Оскільки V_x — це окіл точки x і $V_x \subseteq U_x$, то все доведено. □

Лема 3.2. *Кожна область у довільному ТВП є ламано зв'язною множиною.*

Доведення. Розглянемо довільні точки x_0 і x області G і доведемо, що $x_0 \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} x$. Для цього розглянемо множину

$$G^* = \{x^* \in G : x_0 \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} x^*\}.$$

Ця множина непорожня, бо $x_0 \in G^*$. Покажемо, що вона відкрита і замкнена в G.

Нехай $x^* \in G^*$. Тоді $x_0 \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} x^*$ за означенням множини G^*. Оскільки $x^* \in G$ і множина G відкрита, то G — це окіл точки x^* в X. За лемою 3.1 існує такий ламано зв'язний окіл U точки x^* в X, що $U \subseteq G$. Нехай u — довільна точка з U. Оскільки U ламано зв'язний, то $x^* \overset{\wedge}{\underset{U}{\sim}} u$, а значить, і $x^* \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} u$, адже $U \subseteq G$. За лемою 2.3 звідси отримуємо, що $x_0 \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} u$, отже, $u \in G^*$. Таким чином, $U \subseteq G^*$, отже, множина G^* відкрита в X і в G.

Нехай $x^* \in G$ і $x^* \in \overline{G^*}$. За лемою 3.1 існує такий ламано зв'язний окіл U точки x^* в X, що $U \subseteq G$. Оскільки x^* — це точка дотику множини G^*, то $U \cap G^* \neq \varnothing$, тому існує точка $u \in U \cap G^*$. З того, що $u \in G^*$ випливає, що $x_0 \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} u$. Але u і x^* належать до U. З ламаної зв'язності U випливає, що $u \overset{\wedge}{\underset{U}{\sim}} x^*$, а з включення $U \subseteq G$ і те, що $u \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} x^*$. Знову застосувавши лему 2.3, отримаємо, що $x_0 \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} x^*$, отже, $x^* \in G^*$. Це дає нам замкненість множини G^* у множині G.

Таким чином, G^* — це непорожня відкрита і замкнена підмножина у зв'язній множині G, тому $G^* = G$. Звідки $x \in G^*$, а значить $x_0 \overset{\wedge}{\underset{G}{\sim}} x$. □

4 Лінійні відображення і слабка властивість Дарбу

З означення лінійного відображення легко вивести наступний результат.

Лема 4.1. *Нехай X і Y — векторні простори над полем $\mathbb{K}$, E — ламано зв'язна множина в X і $f : X \to Y$ — лінійне відображення. Тоді $f(E)$ — ламано зв'язна в Y.*

Доведення. Нехай y_0 і y — довільні точки з $f(E)$. Існують такі точки x_0 і x з E, що $f(x_0) = y_0$ і $f(x) = y$. Оскільки множина E ламано зв'язна, то існує така ламана $l : [\alpha, \beta] \to E$, що $l(\alpha) = x_0$ і $l(\beta) = x$. За лемою 2.2 композиція $f \circ l$ буде ламаною в множині $f(E)$, адже $(f \circ l)([\alpha, \beta]) = f(l([\alpha, \beta])) \subseteq f(E)$, причому $(f \circ l)(\alpha) = f(l(\alpha)) = f(x_0) = y_0$ і $(f \circ l)(\beta) = f(l(\beta)) = f(x) = y$. Це доводить, що $f \circ l$ — це ламана, яка з'єднує точки y_0 і y у множині $f(E)$, отже, множина $f(E)$ ламано зв'язна. □

Теорема 1. *Нехай X і Y — ТВП і $f : X \to Y$ — лінійне відображення. Тоді f має слабку властивість Дарбу.*

Доведення. За лемою 3.2 довільна область G в X буде ламано зв'язною множиною. Тоді за лемою 4.1 і образ $f(G)$ буде ламано зв'язною множиною, а значить, лінійно зв'язною, а тому і зв'язною множиною. Таким чином, лінійне відображення переводить кожну область у зв'язну множину, отже, воно має слабку властивість Дарбу. □

5 Еквівалентність неперервності і перехідності для лінійних відображень

З теореми 1 і згаданої у вступі теореми B про декомпозицію неперервності випливає

Теорема 2. *Лінійне відображення $f : X \to Y$, що діє в довільних ТВП, буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно перехідне.*

Доведення. За теоремою 1 відображення f має слабку властивість Дарбу, а тоді з теореми B отримуємо потрібну декомпозицію неперервності. Теорему B можна застосовувати, оскільки за лемою 3.1 кожний ТВП є локально зв'язним. $\square$

Наведемо також і безпосереднє доведення теореми 2 в бік достатності. Нехай f — лінійне перехідне відображення. Доведемо, що f неперервне. Для цього досить встановити, що f неперервне в нулі. Нехай V — довільний окіл нуля в Y. Оскільки f перехідне в точці 0, то існує такий окіл нуля U в X і відкритий окіл нуля V_0 в Y, що $f(U) \subseteq V_0 \sqcup (Y \setminus \overline{V_0})$. Існує такий зрівноважений окіл нуля U_0 в X, що $U_0 \subseteq U$. Покажемо, що $f(U_0) \subseteq V_0$. З леми 2.4 випливає, що U_0 — це ламано зв'язна множина. Тоді образ $f(U_0)$ теж ламано зв'язний за лемою 4.1. Він же, очевидно, буде і зв'язним. Крім того, $f(0) \in f(U_0) \cap V_0 \neq \varnothing$ і $f(U_0) \subseteq f(U) \subseteq V_0 \sqcup (Y \setminus \overline{V_0})$. Оскільки множина $f(U_0)$ зв'язна, то $f(U_0) \subseteq V_0$.

6 Теорема про замкнений графік для скінченновимірних відображень

Нагадаємо, що лінійне відображення $f : X \to Y$ називається *скінченновимірним*, якщо його образ $imf = f(X)$ — це скінченновимірний підпростір простору Y.

Теорема 3. *Нехай X і Y — ТВП, причому простір Y гаусдорфовий, $f : X \to Y$ — лінійне скінченновимірне відображення із замкненим графіком. Тоді f — неперервне відображення.*

Доведення. За умовою образ $Y_0 = f(X)$ — це скінченновимірний лінійний підпростір простору Y, який буде гаусдорфовим, бо таким є простір Y. Нехай $n = dimY_0$ — вимірність простору Y_0. Як відомо [5, с. 18], існує ізоморфізм $\varphi : Y_0 \to \mathbb{K}^n$ простору Y_0 на арифметичний простір $\mathbb{K}^n$ з топологією добутку n екземплярів поля $\mathbb{K}$. Оскільки простір $\mathbb{K}^n$ локально компактний, то таким буде і ізоморфний до нього простір Y_0.

За умовою графік Grf відображення f — це замкнений підпростір добутку $X \times Y$, причому $Grf \subseteq X \times Y_0$. Тоді Grf буде замкненим і в підпросторі $X \times Y_0$ добутку $X \times Y$, отже, f має замкнений графік як відображення з X в Y_0.

За теоремою A відображення f перехідне, а за теоремою 2 воно неперервне, що й треба було довести. $\square$

Теорема 4. *Нехай X — ТВП над полем $\mathbb{K}$ і $f : X \to \mathbb{K}$ — лінійний функціонал із замкненим графіком. Тоді f — неперервний функціонал.*

Доведення. Справді, лінійний функціонал є скінченновимірним лінійним оператором, бо $\dim \mathbb{K} = 1$. Тому це твердження випливає з теореми 3. $\square$

Теорему 4 легко довести і безпосередньо. Справді, якщо Grf замкнений, то буде замкненим і ядро $\ker f$, адже $\ker f = \varphi^{-1}(Grf \cap (X \times \{0\}))$, де $\varphi : X \to X \times \{0\}$, $\varphi(x) = (x, 0)$, — гомеоморфізм простору X на підпростір $X \times \{0\}$ добутку $X \times Y$. Тоді за відомим критерієм неперервності лінійного функціонала [4, с. 15] f буде неперервним.

Цікаво, що наступне твердження можна довести, не використовуючи щойно згаданий критерій.

Теорема 5. *Для лінійного функціонала $f : X \to \mathbb{K}$, заданого на довільному ТВП, наступні умови рівносильні:*

(i) f неперервний;

(ii) графік Grf замкнений в $X \times \mathbb{K}$;

(iii) ядро $\ker f$ замкнене в X.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (iii)$ очевидна, адже $\ker f = f^{-1}(0)$, імплікація $(ii) \Rightarrow (i)$ — це теорема 4. Доведемо, що $(iii) \Rightarrow (ii)$. Нехай ядро $\ker f$ замкнене в X. Доведемо, що і графік Grf теж замкнений в $X \times \mathbb{K}$. Якщо $f = 0$, то це очевидно. Тому вважаємо, що $f \neq 0$. Нехай $(p_j)_{j \in J}$ — це сітка точок $p_j = (x_j, y_j)$ з графіка Grf, яка збігається до деякої точки $p = (x, y) \in X \times \mathbb{K}$. Покажемо, що $p \in Grf$. Ясно, що $x_j \to x$ в X і $y_j \to y$ в $\mathbb{K}$, причому $y_j = f(x_j)$ для кожного j. Оскільки $f \neq 0$, то існує така точка $a \in X$, що $f(a) = 1$. Тоді $f(x_j - y_j a) = f(x_j) - y_j f(a) = f(x_j) - f(x_j) = 0$, отже, $x_j - y_j a \in \ker f$ для кожного j. Але $x_j - y_j a \to x - ya$ в X, тому і $x - ya \in \ker f$, адже ядро $\ker f$ замкнене. Звідси випливає, що $0 = f(x - ya) = f(x) - yf(a) = f(x) - y$, отже, $f(x) = y$, а значить, $p \in Grf$, що і дає нам замкненість графіка Grf в добутку $X \times \mathbb{K}$. $\square$

Таким чином, згаданий критерій неперервності лінійного функціонала є наслідком теореми 4 і сама теорема 4 випливає з нього. Тому цей критерій є теоремою про замкнений графік для лінійного функціонала.

Теорему 5 можна узагальнити на скінченновимірні відображення.

Теорема 6. *Нехай X і Y — ТВП, причому простір Y гаусдорфовий, $f : X \to Y$ — лінійне скінченновимірне відображення. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) f — неперервне відображення;

(ii) графік Grf замкнений в $X \times Y$;

(iii) ядро $\ker f$ замкнене в X.

Доведення. Імплікації $(i) \Rightarrow (ii)$ і $(i) \Rightarrow (iii)$ очевидні.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Нехай Grf — замкнена множина в $X \times Y$. Розглянемо гомеоморфізм $\psi : X \times \{0\} \to X$, де $\psi(x, 0) = x$. Тоді $\psi(Grf \cap (X \times \{0\})) = \ker f$. Множина Grf є замкненою $X \times Y$ за умовою. Оскільки простір Y гаусдорфовий, то одноточкова множина $\{0\}$ буде у ньому замкненою, а тому і множина $X \times \{0\}$ буде замкненою в добутку $X \times Y$. Оскільки при гомеоморфізмі образ замкненої множини є замкненою множиною, то множина $\ker f$ замкнена в X.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Нехай $Y_0 = f(X)$. За умовою Y_0 — скінченновимірний лінійний підпростір простору Y. Припустимо, що $n = \dim Y_0$ і $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — базис підпростору Y_0.

Тоді для довільної точки $y \in Y_0$ існує такий єдиний набір скалярів $\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, що $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$. Покладемо $\varphi(y) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Оскільки простір Y, а отже і Y_0, є гаусдорфовим, то відображення $\varphi : Y_0 \to \mathbb{K}^n$ є ізоморфізмом ТВП [5, с.18]. Нехай $\varphi(f(x)) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$. Відображення $f_k : X \to \mathbb{K}$ — це лінійні функціонали.

Нехай ядро $\ker f$ замкнене в X. Зрозуміло, що $\ker f = \bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k$. Покажемо, що ядра $\ker f_k$ замкнені в X для кожного $k = 1, 2, \dots, n$. Міркування проведемо індукцією відносно n. При $n = 1$ маємо, що $\ker f = \ker f_1$ і тому $\ker f_1$ — замкнена множина.

Нехай $n = 2$. Покладемо $L = \ker f$ і $L_k = \ker f_k$, $k = 1, 2$. У випадку, коли, наприклад, $L_1 \subseteq L_2$, то $L_1 = L$ — замкнена множина. Тому і множина L_2 теж замкнена, адже $L_2 = L_1$ або $L_2 = X$. Так само буде, коли $L_2 \subseteq L_1$. Тому припустимо, що $L_1 \not\subseteq L_2$ і $L_2 \not\subseteq L_1$.

Оскільки $L_1 \not\subseteq L_2$, то існує точка $x_1 \in L_1 \setminus L_2$. Оскільки $x_1 \notin L_2$, то $f_2(x_1) \neq 0$ і ми можемо розглянути точку $a_1 = \frac{x_1}{f_2(x_1)}$, що входить в L_1 і для неї $f_2(a_1) = 1$. Покажемо, що $L_1 = L + \langle a_1 \rangle$. Нехай $x \in L_1$. Тоді $y = x - f_2(x)a_1 \in L_1$. Крім того, $f_2(y) = f_2(x) - f_2(x)f_2(a_1) = f_2(x) - f_2(x) = 0$ і тому $y \in L_2$. Таким чином, $y \in L = L_1 \cap L_2$ і $x = y + f_2(x)a_1 \in L + \langle a_1 \rangle$. Нехай тепер $x \in L + \langle a_1 \rangle$. Тоді $x = y + \lambda a_1$, де $y \in L$ і $\lambda \in \mathbb{K}$. Оскільки $f_1(x) = f_1(y) + \lambda f_1(a_1) = 0$, то $x \in L_1$. Аналогічно встановлюється, що існує така точка $a_2 \in L_2 \setminus L_1$, що $L_2 = L + \langle a_2 \rangle$. Оскільки множина L замкнена, а $\langle a_k \rangle$ — одновимірний підпростір, то множини L_k для $k = 1, 2$ теж будуть замкненими, адже сума замкненого лінійного підпростору і скінченновимірного підпростору у довільному ТВП буде замкненою.

Здійснимо індуктивний крок. Нехай $n > 2$ і $L = \bigcap_{k=1}^{n} L_k$ — замкнена множина. Покажемо, що множини $\ker f_k = L_k$ замкнені для $k = 1, 2, \dots, n$. Розглянемо звуження $g_k = f_k|_{L_n}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Оскільки $\ker g_k = L_n \cap \ker f_k$, то $\bigcap_{k=1}^{n-1} \ker g_k = L$ — замкнена множина. За індуктивним припущенням множини $\ker g_k$ замкнені для $k = 1, 2, \dots, n-1$. Оскільки $\ker f_n \cap \ker f_k = \ker g_k$ для $k = 1, 2, \dots, n-1$, то за доведеним множини $\ker f_n$ і $\ker f_k$ замкнені для $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Таким чином, ми встановили, що ядра $\ker f_k$ замкнені в X для $k = 1, 2, \dots, n$. Тому функціонали $f_k : X \to \mathbb{K}$ неперервні для $k = 1, 2, \dots, n$. Отже, і відображення $\varphi \circ f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : X \to \mathbb{K}^n$ неперервне, а значить і $f : X \to Y$ — неперервне, адже φ — ізоморфізм ТВП Y_0 та $\mathbb{K}^n$ і тотожне вкладення $Y_0 \hookrightarrow Y$ неперервне. □

Зауважимо, що можна навести безпосереднє доведення імплікації $(iii) \Rightarrow (ii)$ теореми 6, використавши цю ж імплікацію з теореми 5. Тому теорему 6 можна вивести і з теореми 3.

У доведенні теореми 6 ми використали таке твердження: якщо L — замкнений лінійний підпростір ТВП X і M — скінченновимірний лінійний підпростір X, то їх сума $N = L + M$ буде замкненою в X. Воно доводиться таким чином. Фактор-простір $\hat{X} = X/L$ буде гаусдорфовим [5, с. 22], адже підпростір L замкнений. Образ $\pi(N) = \pi(M) = \hat{M}$ простору N при фактор-відображенні $\pi : X \to \hat{X}$, $\pi(x) = \hat{x} = x + L$, буде скінченновимірним підпростором гаусдорфового ТВП $\hat{X}$, отже, він буде замкненим в $\hat{X}$ [5, с. 20]. Але $N = \pi^{-1}(\hat{M})$, отже, N буде замкненим в X, бо фактор-відображення $\pi : X \to \hat{X}$ неперервне.

7 Приклад неперехідного лінійного вдображення із замкненим графіком

Розгляглянемо банахів простір $C[a,b]$ всіх неперервних функцій $y : [a,b] \to \mathbb{R}$, наділений рівномірною нормою $\|y\| = \max_{a \le t \le b} |y(t)|$.

Теорема 7. *Нехай $X = C^1[a,b]$ — нормований простір всіх неперервно диференційовних функцій $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, заданих на невиродженому відрізку $[a,b]$ числової прямої, наділений рівномірною нормою $\|\cdot\|$, $Y = C[a,b]$ — банахів простір всіх неперервних функцій $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ з тією ж рівномірною нормою $\|\cdot\|$ і $D : X \to Y$, $Dx = x'$, — оператор диференціювання. Тоді D — лінійний скрізь розривний оператор із замкненим графіком, який не є перехідним.*

Доведення. Нехай $x_n \to x$ у просторі X і $y_n = Dx_n = x_n' \to y$ у просторі Y. Тоді $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$ на $[a,b]$ і $x_n'(t) \rightrightarrows y(t)$ на $[a,b]$. За класичною теоремою аналізу $x'(t) = y(t)$ на $[a,b]$, тобто $Dx = y$. Це дає нам замкненість графіка оператора D.

Лінійність D очевидна. Розривність у нулі оператора D випливає з того, що послідовність неперервно диференційовних функцій $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$ рівномірно прямує до нуля на $[a,b]$, але послідовність їх похідних $x_n'(t) = \cos nt$ навіть поточково на невиродженому відрізку $[a,b]$ до нуля не прямує. Тому оператор D розривний в нулі, а отже, і в кожній точці як лінійний оператор.

Нарешті, D не може бути перехідним згідно з теоремою 2, адже перехідні лінійні оператори завжди неперервні. □

Автори висловлюють вдячність Т.Банаху, Р.Коті, О.Маслюченку та В.Михайлюку за участь в обговореннях і корисні поради.

References

[1] Banach S. Course of functional analysis. Rad. Shkola, Kyiv, 1948. (in Ukrainian)

[2] Engelking R. General topology. Mir, Moscow, 1986. (in Russian)

[3] Kretsu V.I., Maslyuchenko V.K. *Stellings continuity, separate continuity and functions with closed graph.* Sci. Bull. Chernivtsi Univ. Mathematics 2007, **349**, 50–54. (in Ukrainian)

[4] Maslyuchenko V.K. Elements of duality theory. Ruta, Chernivtsi, 2005. (in Ukrainian)

[5] Maslyuchenko V.K. Linear continuous operators. Ruta, Chernivtsi, 2002. (in Ukrainian)

[6] Maslyuchenko V.K. Topological vector spaces of first type. Ruta, Chernivtsi, 2002. (in Ukrainian)

[7] Maslyuchenko V.K., Nesterenko V.V. *Decomposition of continuity and transition maps.* Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. 2011, **8**, 132–150. (in Ukrainian)

[8] Mimna R.A. *A note on separate continuity and connectivity properties.* Math. Bohem. 1997, **122** (1), 57–61.

[9] Wojcik M.R. Closed and connected graphs of functions; examples of connected punctiform spaces. Rozprawa doktorska, Katowice, 2008.

Надійшло 30.11.2012

Maslyuchenko V.K., Nesterenko V.V. *Weak Darboux property and transitivity of linear mappings on topological vector spaces.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 79–88.

It is shown that every linear mapping on topological vector spaces always has weak Darboux property, therefore, it is continuous if and only if it is transitive. For finite-dimensional mapping f with values in Hausdorff topological vector space the following conditions are equivalent: (i) f is continuous; (ii) graph of f is closed; (iii) kernel of f is closed; (iv) f is transition map.

Key words and phrases: linear mapping, Darboux property, transitive mapping, closed graph, closed kernel.

Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. *Слабое свойство Дарбу и переходность линейных отображений в топологических векторных пространствах* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 79–88.

Показано, что каждое линейное отображение в топологических векторных пространствах имеет слабое свойство Дарбу, а значит, будет непрерывным тогда и только тогда, когда оно переходное. Для конечномерного отображения f со значениями в хаусдорфовом топологическом векторном пространстве следующие условия равносильны: (i) f непрерывное; (ii) график f замкнут; (iii) ядро f замкнуто; (iv) f переходное.

Ключевые слова и фразы: линейное отображение, свойство Дарбу, переходное отображение, замкнутый график, замкнутое ядро.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.51

МИРОНИК В.І., МИХАЙЛЮК В.В.

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ У КЛАСІ НАРІЗНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Миронік В.І, Михайлюк В.В. *Лінійні рівняння з частинними похідними першого порядку у класі нарізно диференційовних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 89–93.

Встановлюється загальний вигляд розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку у класі нарізно диференційовних функцій.

Ключові слова і фрази: нарізно диференційовні функції, диференціальні рівняння з частинними похідними.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: vadmyron@gmail.com (Миронік В.І.), vmykhaylyuk@ukr.net (Михайлюк В.В.)

ВСТУП

Розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними за мінімальних вимог, тобто розв'язування того чи іншого диференціального рівняння в класі функцій, які задовольняють строго необхідні умови для існування виразів, що входять у дане рівняння, беруть свій початок з класичної праці Р.Бера [2]. В ній було показано, що кожний неперервний за сукупністю змінних нарізно диференційовний, тобто диференційовний відносно кожної змінної зокрема, розв'язок $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

має вигляд $f(x,y) = \varphi(x-y)$. У зв'язку з цим Р.Бер в [2] поставив питання про те, чи зберігається вигляд розв'язків рівняння (1) у класі нарізно диференційовних функцій. Результат Р.Бера, як і його питання, були пізніше продубльовані в [4].

Подальші вивчення розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними за мінімальних вимог були пророблені в роботах [5, 6, 1, 3, 7]. Зокрема, в [7] було розвинуто метод Р.Бера, застосований в [2], і встановлено, що його питання має позитивну відповідь. Фактично в [7, теорема 4.3, наслідок 4.4] був доведений наступний результат, який там сформульований для функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Нехай $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $f : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ — така нарізно диференційовна функція, що $f'_x(p) + kf'_y(p) = 0$ для кожного $p \in (a,b) \times (c,d)$. Тоді існує визначена на відповідному інтервалі диференційовна функція φ така, що $f(x,y) = \varphi(kx-y)$ для довільного $(x,y) \in (a,b) \times (c,d)$.*

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26B05, 35A99.

У зв'язку з цим природно виникає питання про вигляд розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами у класі нарізно диференційовних функцій. У даній статті ми досліджуємо розв'язки деяких типів таких рівнянь і встановлюємо, що вигляд таких розв'язків є аналогічним до вигляду розв'язків класичних рівнянь першого порядку.

1 Випадок додатних коефіцієнтів

Спочатку з допомогою стандартних міркувань доведемо узагальнення теореми 1 на випадок строго додатних коефіцієнтів.

Теорема 2. *Нехай $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}$ і $\beta : (c,d) \to \mathbb{R}$ — строго додатні функції, які мають первісні $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ і $v : (c,d) \to \mathbb{R}$ відповідно, і $f : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ — така нарізно диференційовна функція, що*

$$\beta(y)f'_x(x,y) + \alpha(x)f'_y(x,y) = 0 \tag{2}$$

для всіх $(x,y) \in (a,b) \times (c,d)$. Тоді існує така диференційовна функція φ, що

$$f(x,y) = \varphi(u(x) - v(y))$$

для всіх $(x,y) \in (a,b) \times (c,d)$.

Доведення. Розглянемо функції $s = u(x)$ і $t = v(y)$. Оскільки $u'(x) = \alpha(x) > 0$ і $v'(y) = \beta(y) > 0$, то функції u і v строго зростають. Тому існують обернені функції $x = x(s) = u^{-1}(s)$ і $y = y(t) = v^{-1}(t)$, причому ці функції є диференційовними і $x'(s) = \frac{1}{u'(x)} = \frac{1}{\alpha(x)}$ та $y'(t) = \frac{1}{v'(y)} = \frac{1}{\beta(y)}$.

Позначимо $(a_1,b_1) = \{u(x) : x \in (a,b)\}$ і $(c_1,d_1) = \{v(y) : y \in (c,d)\}$. Тепер розглянемо функцію $g : (a_1,b_1) \times (c_1,d_1) \to \mathbb{R}, g(s,t) = f(x(s),y(t))$. Оскільки f нарізно диференційовна, то

$$g'_s(s,t) = f'_x(x(s),y(t)) \cdot x'(s) = f'_x(x(s),y(t)) \cdot \frac{1}{\alpha(x(s))},$$

і

$$g'_t(s,t) = f'_y(x(s),y(t)) \cdot \frac{1}{\beta(y(t))}.$$

Отже, функція g нарізно диференційовна і, врахувавши, що f задовольняє (2), одержимо

$$g'_s(s,t) + g'_t(s,t) = 0.$$

Тому, згідно з теоремою 1, існує така диференційовна функція φ, що $g(s,t) = \varphi(s-t)$. Отже,

$$f(x,y) = g(u(x),v(y)) = \varphi(u(x) - v(y)).$$

□

2 Основний результат

Твердження 2.1. *Нехай $f : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна відносно першої змінної функція, $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервні функції і $x_0 \in (a,b)$. При цьому, ці функції задовольняють умови $f(x,y) = \varphi_1(u(x) - y)$ для довільних $x \in (a,x_0)$, $y \in \mathbb{R}$ і $f(x,y) = \varphi_2(u(x) - y)$ для довільних $x \in (x_0,b)$, $y \in \mathbb{R}$. Тоді $\varphi_1 = \varphi_2$ і $f(x,y) = \varphi_1(u(x) - y)$ для довільних $x \in (a,b)$ і $y \in \mathbb{R}$.*

Доведення. $f(x_0,y) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0-0} \varphi_1(u(x) - y) = \varphi_1(u(x_0) - y)$. З іншого боку, $f(x_0,y) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0+0} \varphi_2(u(x) - y) = \varphi_2(u(x_0) - y)$.

Отже, $\varphi_1(u(x_0) - y) = \varphi_2(u(x_0) - y)$ для всіх $y \in \mathbb{R}$, звідки отримуємо потрібне. □

Теорема 3. *Нехай $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функція, яка задовольняє наступні умови:*
1) $\alpha^{-1}(0)$ — замкнена, не більш ніж зліченна множина;
2) якщо $\alpha(x) \neq 0$ на інтервалі $I \subseteq \mathbb{R}$, то α зберігає знак на I;
3) α має первісну функцію $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
і $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ така нарізно диференційовна функція, що

$$f'_x(x,y) + \alpha(x)f'_y(x,y) = 0 \tag{3}$$

для будь-яких $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Тоді існує така диференційовна функція φ, що $f(x,y) = \varphi(u(x) - y)$.

Доведення. Позначимо $F = \alpha^{-1}(0)$. Тоді $\mathbb{R} \setminus F = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} W_n$, де $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність інтервалів числової прямої. Позначимо через $\mathfrak{I}$ сукупність усіх таких інтервалів $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, що для будь-якого $I \in \mathfrak{I}$ існує така диференційовна функція $\varphi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що $f(x,y) = \varphi_I(u(x) - y)$ для всіх $x \in I$ та $y \in \mathbb{R}$. З теореми 2 і умови 2) випливає, що $W_n \in \mathfrak{I}$ для довільного $n \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що сукупність $\mathfrak{I}$ задовольняє такі умови:

(а) $\varphi_I = \varphi_J$ для довільних $I, J \in \mathfrak{I}$ з $I \cap J \neq \varnothing$, причому $I \cup J \in \mathfrak{I}$;

(б) якщо $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{I}$ така, що $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{J}} I \neq \varnothing$, то $\bigcup\limits_{I\in\mathfrak{J}} I \in \mathfrak{I}$;

(в) для кожного $I \in \mathfrak{I}$ існує такий максимальний в $\mathfrak{I}$ інтервал J, що $I \subseteq J$;

(г) якщо I_1 і I_2 — максимальні і різні, то $I_1 \cap I_2 = \varnothing$.

Доведемо ці властивості.

(а) Нехай $x \in I \cap J$. Тоді $f(x,y) = \varphi_I(u(x) - y) = \varphi_J(u(x) - y)$ для всіх $y \in \mathbb{R}$. Отже, $\varphi_I = \varphi_J$. Крім того, $f(x,y) = \varphi_I(u(x) - y)$ для довільних $x \in I \cup J$ і $y \in \mathbb{R}$. Тому $I \cup J \in \mathfrak{I}$.

(б) Нехай $I_1, I_2 \in \mathfrak{J}$. Тоді з (а) випливає, що $\varphi_{I_1} = \varphi_{I_2}$. Якщо позначити $I_0 = \bigcup\limits_{I\in\mathfrak{J}} I$ і $\varphi_{I_0} = \varphi_I$, де I — деякий фіксований інтервал з $\mathfrak{J}$, то одержимо $f(x,y) = \varphi_{I_0}(u(x) - y)$ для довільного $x \in I_0$ і $y \in \mathbb{R}$. Отже, $I_0 \in \mathfrak{I}$.

(в) Зафіксуємо деякий інтервал $I_0 \in \mathfrak{I}$. Розглянемо систему інтервалів $\mathfrak{J} = \{I \in \mathfrak{I} : I_0 \subseteq I\}$. Зрозуміло, що $J = \bigcup\limits_{I\in\mathfrak{J}} I$ — інтервал. Крім того, з умови (б) випливає, що $J \in \mathfrak{I}$.

Покажемо, що J — максимальний в $\mathfrak{I}$. Припустимо, що існує $J_1 \in \mathfrak{I}$ такий, що $J_1 \supseteq J$. Тоді $I_0 \subseteq J \subseteq J_1$, тому $J_1 \in \mathfrak{J}$. Крім того, $J_1 \subseteq \bigcup\limits_{I \in \mathfrak{J}} I = J$, а значить $J_1 = J$.

(г) Припустимо, що I_1 та I_2 максимальні в $\mathfrak{I}$ і $I_1 \bigcap I_2 \neq \varnothing$. Тоді $I = I_1 \bigcup I_2 \in \mathfrak{I}$. З максимальності I_1 та I_2 випливає, що $I_1 = I_2$.

З умов (в) та (г) випливає, що множину $G = \bigcup\limits_{I \in \mathfrak{I}} I$ можна подати у вигляді $G = \bigsqcup\limits_{n \in N} I_n$, де $N \subseteq \mathbb{N}$ і всі інтервали I_n — максимальні в $\mathfrak{I}$. Оскільки $W_n \subseteq G$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $F_1 = \mathbb{R} \setminus G \subseteq \mathbb{R} \setminus (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} W_n) = F$. Зрозуміло, що F_1 — замкнена, не більш ніж злічення множина. Припустимо, що $F_1 \neq \varnothing$. Тоді множина F_1 має ізольовану точку x_0.

Виберемо інтервали $U = (a, x_0)$, $V = (x_0, b) \in \{I_n : n \in N\}$. Тоді $I = (a, b) \in \mathfrak{I}$ згідно з твердженням 2.1, що суперечить максимальності U та V. Отже, $F_1 = \varnothing$, тобто $G = \mathbb{R}$. Це означає, що $\mathbb{R} \in \mathfrak{I}$. Залишилось покласти $\varphi = \varphi_{\mathbb{R}}$. □

Зауваження 2.1. *Аналогічно доводиться теорема 3 для функції $f : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

3 Приклади, питання

Наступний приклад показує, що немає аналогів твердження 2.1 і теореми 3 для функції $f : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$.

Твердження 3.1. *Нехай $\varphi_1, \varphi_2 : (-2, 1) \to \mathbb{R}$ — такі різні нескінченно диференційовні функції, що $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ для кожного $t \in (-1, 1)$. Тоді функція $f : \mathbb{R} \times (0, 1) \to \mathbb{R}$,*

$$f(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(\cos x - y), & (x,y) \in (-\infty, 0) \times (0,1), \\ \varphi_2(\cos x - y), & (x,y) \in ([0, +\infty) \times (0,1). \end{cases}$$

задовольняє наступні умови:

1) *f нескінченно диференційовна;*
2) *$f'_x(p) + \sin x f'_y(p) = 0$ для кожного $p \in \mathbb{R} \times (0,1)$;*
3) *$f(x,y) \neq \varphi(\cos x - y)$ для довільної функції $\varphi : (-2, 1) \to \mathbb{R}$.*

Доведення. Умови 1) і 2) випливають з того, що

$$f(x,y) = \varphi_1(\cos x - y) \quad \text{при} \quad (x,y) \in (-\infty, \frac{\pi}{2}) \times (0,1).$$

Виберемо точку $t \in (-2, -1)$ так, що $\varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)$, і візьмемо $x_1 \in (-\infty, 0)$, $y_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (0, +\infty)$ і $y_2 \in (0, 1)$ так, що $\cos x_1 - y_1 = \cos x_1 - y_1 = t$. Тоді

$$f(x_1, y_1) = \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t) = f(x_2, y_2),$$

що доводить 3). □

Зауваження 3.1. *Немає аналогу теореми 3 для рівнянь виду (2), де $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго додатна неперервна функція і $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє умови 1) – 3) теореми 3. Достатньо розглянути рівняння*

$$\frac{1}{\pi(y^2+1)} f'_x(x,y) + \sin x f'_y(x,y) = 0$$

і його розв'язок $g(x,y) = f(x, \frac{\operatorname{arctg} y}{\pi} + \frac{1}{2})$, де f — функція з твердження 3.1.

У зв'язку з цим виникає таке питання.

Питання. *Нехай $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — (неперервна) функція, яка має первісну $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Чи обов'язково нарізно диференційовний розв'язок $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ рівняння (3) має вигляд $f(x,y) = \varphi(u(x) - y)$?*

References

[1] Banakh T., Mykhaylyuk V. *Separately twice differentiable functions and the equation of string oscillation.* Real Anal. Exch. 2012/2013, **38** (1), 133–156.

[2] Baire R. *Sur les fonctions de variables reelles.* Annali di mat. pura ed appl., ser. 3, 1899, 1–123.

[3] Bruckner A.M., Petruska G., Preiss O., Thomson B.S. *The equation $u_x u_y = 0$ factors.* Acta Math. Hung. 1991, **57** (3-4), 275–278.

[4] Chernoff P.R., Royden H.F. *The Equation $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$.* Am. Math. Mon. 1975, **82** (5), 530–531.

[5] Kalancha A.K., Maslyuchenko V.K. *Generalization of Bruckner-Petruska-Preiss-Thomson theorem* Mat. Stud. 1999, **11** (1), 48–52. (in Ukrainian)

[6] Maslyuchenko V.K. *A property of partial derivatives.* Ukr. Math. J. 1987, **39** (4), 529–531. (in Russian)

[7] Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V. *Solving of partial differential equations under minimal conditions.* J. Math. Phys., Anal., Geom. 2008, **4** (2), 252–266.

Надійшло 11.10.2012

Myronyk V.I., Mykhaylyuk V.V. *First-order linear partial differential equations in the class of separately differentiable functions.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 89–93.

It is obtained a general solution of first-order linear partial differential equations in the class of separately differentiable functions.

Key words and phrases: separately differentiable functions, partial differential equations.

Мироник В.И, Михайлюк В.В. *Линейные уравнения с частными производными первого порядка в классе раздельно дифференцируемых функций* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 89–93.

Устанавливается общий вид решений дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в классе раздельно дифференцируемых функций.

Ключевые слова и фразы: раздельно дифференцируемые функции, дифференциальные уравнения с частными производными.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 513.6

НЕСТЕРУК В.І.

ПРО ФОРМУЛУ КОЛИВАГІНА, ДОБУТОК ТЕЙТА АСОЦІЙОВАНИЙ НА ІЗОГЕНІЇ, ЛОКАЛЬНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ АРТІНА І СИМВОЛ ГІЛЬБЕРТА

Нестерук В.І. *Про формулу Коливагіна, добуток Тейта асоційований на ізогенії, локальне відображення Артіна і символ Гільберта* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 94–101.

Доведено невиродженість добутку Тейта і формулу Коливагіна для еліптичних кривих з невиродженою редукцією над n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем, досконалість добутку Тейта асоційованого на ізогенії між абелевими многовидами над псевдолокальним та n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем і зв'язок локального відображення Артіна і символу Гільберта для n-вимірного ($n \leq 3$) загального локального поля.

Ключові слова і фрази: псевдолокальне поле, n-вимірне псевдолокальне поле, n-вимірне загальне локальне поле, ізогенія, добуток Тейта асоційований на ізогенії, локальне відображення Артіна, символ Гільберта, формула Коливагіна.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
E-mail: volodymyr-nesteruk@rambler.ru

ВСТУП

М. Папікіян [10] описав зв'язок між добутком Тейта і добутком Вейля для кривих, визначених над локальним полем. П. Бруін [3] визначив добуток Тейта асоційований на ізогенії у випадку, коли поле скінченне. П. Бруін [3] і Е. Шафер [13] розвинули досконалий добуток Тейта і Фрея-Рюка до добутку Тейта асоційованого на ізогенії.

Відображення Артіна вперше введено Е. Артіном у кінці 20-х – на початку 30-х років минулого століття. Вагомий внесок у його вивчення зробили Е. Нетер, Г. Гассе, Р. Брауер, Ж.-П. Серр [12], І.Б. Фесенко [5], Дж. Мілн, М. Папікіян [10]. Д. Гільберт визначив і дослідив символ норменного лишку, який сьогодні називають символом Гільберта.

Мета цієї роботи — доведення невиродженості добутку Тейта для еліптичних кривих і формули Коливагіна над n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем, дослідження добутку Тейта, асоційованого на ізогенії, на досконалість над псевдолокальним полем та n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем, доведення зв'язку символа Гільберта і відображення Артіна у випадку, коли поле є n-вимірним ($n \leq 3$) загальним локальним полем.

Базуючись на роботі М. Папікіяна [10] доведено невиродженість добутку Тейта і формулу Коливагіна для еліптичних кривих над n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем, а на роботах [10] та [4] — зв'язок символа Гільберта і відображення Артіна для n-вимірного ($n \leq 3$) загального локального поля. Використовуючи праці П. Бруіна [3], доведено, що добуток Тейта асоційований на ізогенії досконалий над псевдолокальним полем та n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 12G99, 14H05, 14H52.

1 ДОБУТОК ТЕЙТА АСОЦІЙОВАНИЙ НА ІЗОГЕНІЇ

Нехай K — n-вимірне ($n \leq 3$) псевдолокальне поле, тобто поле, для якого задана послідовність повних дискретно нормованих полів $K = K_n, K_{n-1}, \dots, K_0$, де кожне наступне поле є полем лишків попереднього і поле K_0 псевдоскінченне [2, 6], E — еліптична крива з невиродженою редукцією, визначена над K, $\overline{K}$ — сепарабельне замикання поля K, K^* — мультиплікативна група поля K. Далі m — натуральне число таке, що $(m, char(K)) = 1$, $\mu_m(\overline{K})$ — група коренів степеня m з 1 в $\overline{K}$, G — група Галуа максимального абелевого розширення поля K з експонентою m, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ — абсолютна група Галуа поля K. Позначимо через $\mathrm{E}_m(K)$ групу m-кручення, $\mathrm{H}^1(G_K, \mathrm{E}(\overline{K}))_m$ (відповідно $\mathrm{H}^1(G, \overline{K}^*)_m$) — підгрупу елементів в $\mathrm{H}^1(G_K, \mathrm{E}(\overline{K}))$ (відповідно $\mathrm{H}^1(G, \overline{K}^*)$), порядок яких ділить m. Фіксуємо $\sigma' \in G_K$ і називаємо σ' автоморфізмом Фробеніуса та позначаємо через $Frob_{\overline{K}/K}$ Припускаємо, що $\mu_m(\overline{K}) \subset K$. Для всіх $0 \leq i \leq 2$ групи $\mathrm{H}^i(G_K, \mathrm{E}_m(\overline{K}))$ скінченні.

Означення 1.1. *Добуток* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{E}(K)/m\mathrm{E}(K) \times \mathrm{H}^1(G_K, \mathrm{E}(\overline{K}))_m \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *називається добутком Тейта.*

Фіксуємо ξ — твірний елемент з K^*/K^{*m}, який можна ідентифікувати з первісним коренем з 1, $\sigma \in G$. Тоді вибираємо ζ наступним чином:

$$\zeta = \frac{\sigma(\xi^{1/m})}{\xi^{1/m}}. \tag{1}$$

Нехай $b \in K^*$, $\varphi_b \in \mathrm{Hom}(G, \mu_m(\overline{K}))$ і $\varphi_b(g) = \frac{g(b^{1/m})}{b^{1/m}}$. Розглянемо гомоморфізми $\overline{\varphi}_a, \overline{\varphi}_b : G \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ такі, що $\zeta^{\overline{\varphi}_a(g)} = \varphi_a(g)$, $\zeta^{\overline{\varphi}_b(g)} = \varphi_b(g)$. Визначимо елемент з $\mathrm{H}^2(G, \mu_m(\overline{K}))$ білінійною формою $\mathrm{B}_{a,b}(g_1, g_2) = \zeta^{\overline{\varphi}_a(g_1)\overline{\varphi}_a(g_2)}$. Нехай відображення інваріанта задане наступним чином $inv : \mathrm{H}^2(G, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^2(G, \overline{K}^*)_m \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Тоді символ Гільберта представляється у вигляді $(a, b) = \zeta^{inv \mathrm{B}_{a,b}}$. Як і в [10] зв'яжемо $c_1 \in \mathrm{E}(K)/m\mathrm{E}(K)$ і $c_2 \in \mathrm{H}^1(G, \mathrm{E}(\overline{K}))_m$ гомоморфізмами $\varphi_1 : \mu_m(\overline{K}) \to \mathrm{E}_m(K)$ та $\varphi_2 : \mu_m(\overline{K}) \to \mathrm{E}_m(K)$, використовуючи $\mathrm{E}(K)/m\mathrm{E}(K) \cong \mathrm{Hom}(\mu_m(\overline{K}), \mathrm{E}_m(\overline{K}))$ і $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{E}(\overline{K}))_m \cong \mathrm{Hom}(\mu_m(\overline{K}), \mathrm{E}_m(\overline{K}))$. Відомо, що добуток Вейля $\{\cdot, \cdot\}$: $\mathrm{E}_m(\overline{K}) \times \mathrm{E}_m(\overline{K}) \longrightarrow \mu_m(\overline{K})$ і добуток Тейта задовольняє $\zeta^{\langle c_1, c_2 \rangle} = \{e_1, e_2\}$.

Означення 1.2. *Формула* $\zeta^{\langle c_1, c_2 \rangle} = \{e_1, e_2\}$, *що зв'язує добуток Тейта і добуток Вейля, називається формулою Коливагіна.*

Теорема 1. *Добуток Тейта (добуток Тейта-Шафаревича) для еліптичних кривих з невиродженою редукцією над n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем невироджений.*

Доведення теореми випливає з наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай ζ — примітивний корінь з 1 в K вибраний належним чином* (1) *і $\varphi_1(\pi) = e_1$, $\varphi_2(\xi) = e_2 \in \mathrm{E}_m(\overline{K})$. Тоді $\zeta^{\langle c_1, c_2 \rangle} = \{e_1, e_2\}$, де $\{e_1, e_2\}$ — добуток Вейля на групі $\mathrm{E}_m(\overline{K})$, $\langle c_1, c_2 \rangle$ — добуток Тейта.*

Доведення. Міркуємо індукцією за n. Якщо $n = 0$, то одержуємо псевдоскінченне поле, для якого добуток Тейта невироджений [8] і добуток Вейля невироджений. Доведення даного випадку очевидне.

Якщо $n = 1$, то отримуємо псевдолокальне поле і добуток Тейта невироджений [9]. Знову будемо слідувати міркуванням з [10]. Розглянемо відображення $\varphi_1 : K^*/K^{*m} \to \mathrm{E}_m(K)$ і $\varphi_2 : K^*/K^{*m} \to \mathrm{E}_m(K)$, що задовольняють наступні умови $\varphi_1(\pi) = e_1$, $\varphi_1(\zeta) = 0$, $\varphi_2(\pi) = 0$, $\varphi_2(\zeta) = e_2$ та $\cup$-добуток $\varphi_1 \cup \varphi_2 \in \mathrm{H}^2(G, \mu_m(\overline{K}))$, який використовується в обчисленні добутку Тейта та описується білінійною формою $\mathrm{B}_1 : K^*/K^{*m} \times K^*/K^{*m} \to \mu_m(\overline{K})$, для якої $\mathrm{B}_1(a,b) = \{\varphi_1(a), \varphi_2(b)\}$ і $\mathrm{B}_1(\pi,\pi) = 1$, $\mathrm{B}_1(\pi,\zeta) = \{e_1,e_2\}$, $\mathrm{B}_1(\zeta,\pi) = 1$, $\mathrm{B}_1(\zeta,\zeta) = 1$. Наведемо допоміжні розрахунки для обчислення білінійних форм $(\pi,\zeta) = \frac{\theta(\pi)\zeta^{1/m}}{\zeta^{1/m}} = \frac{\sigma(\zeta^{1/m})}{\zeta^{1/m}} = \zeta$, $(\zeta,\pi) = \zeta^{-1}$, $(\pi,\pi) = 1$, $(\zeta,\zeta) = 1$. Обчислимо білінійні форми $\mathrm{B}_{\zeta,\pi}(\pi,\pi) = \zeta^{\overline{\varphi}_\zeta(\pi)\overline{\varphi}_\pi(\pi)} = \varphi_\pi(\pi)^{\overline{\varphi}_\zeta(\pi)} = (\pi,\pi)^{\overline{\varphi}_\zeta(\pi)} = 1^{\overline{\varphi}_\zeta(\pi)} = 1$, $\mathrm{B}_{\zeta,\pi}(\zeta,\pi) = \zeta^{-1}$, $\mathrm{B}_{\zeta,\pi}(\zeta,\zeta) = 1$, $\mathrm{B}_{\zeta,\pi}(\pi,\zeta) = 1$. Нехай $\{e_1,e_2\} = \zeta^x$. Зв'яжемо білінійні форми B_1 та $\mathrm{B}_{\zeta,\pi}$ відношенням $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_{\zeta,\pi}^{-x}$, оскільки $inv\mathrm{B}_1 = (-x)\, inv\mathrm{B}_{\zeta,\pi}$. Для $\zeta^{inv\mathrm{B}_1} = \zeta^{(-x)inv\mathrm{B}_{\zeta,\pi}}$ знайдемо $\zeta^{inv\mathrm{B}_{\zeta,\pi}} = (\zeta,\pi) = \zeta^{-1}$. Тоді $\zeta^{(-x)inv\mathrm{B}_{\zeta,\pi}} = (\zeta^{inv\mathrm{B}_{\zeta,\pi}})^{-x} = (\zeta^{-1})^{-x} = \zeta^x$. Звідси $inv\mathrm{B}_1 = x$, оскільки $\{e_1,e_2\} = \zeta^{inv\mathrm{B}_1}$. Врахувавши, що $inv\mathrm{B}_1$ є значенням добутку Тейта, то $\zeta^{<c_1,c_2>} = \{e_1,e_2\}$.

Якщо $n > 1$, то використовуємо метод, запропонований В.І. Андрійчуком [1] для n-вимірного псевдолокального поля. Розглянемо точну послідовність редукції $0 \to \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E} \to \mathrm{E}' \to 0$, де ядро редукції E_1 є однозначно подільною на m групою. Розглянемо комутативну діаграму з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{E}_1 & \longrightarrow & \mathrm{E}(K_n) & \longrightarrow & \mathrm{E}'(K_{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{E}_1 & \longrightarrow & \mathrm{E}(K_n) & \longrightarrow & \mathrm{E}'(K_{n-1}) & \longrightarrow & 0\,. \end{array} \tag{2}$$

Застосовуючи лему про змію до (2), одержуємо $0 \to \mathrm{E}_m(K_n) \to \mathrm{E}_m(K_{n-1}) \to 0 \to \mathrm{E}(K_n)/m\mathrm{E}(K_n) \to \mathrm{E}'(K_{n-1})/m\mathrm{E}'(K_{n-1}) \to 0$. Звідси $\mathrm{E}_m(K_n) \cong \mathrm{E}_m(K_{n-1})$ і $\mathrm{E}(K_n)/m\mathrm{E}(K_n) \cong \mathrm{E}'(K_{n-1})/m\mathrm{E}'(K_{n-1})$ та з випадку $n = 1$ випливає правильність теореми. □

Зазначимо, що міркування, використані для доведення цієї теореми, запозичені з роботи М. Папікіяна [10], де аналогічний результат сформульовано і доведено для випадку еліптичних кривих з невиродженими редукціями, визначених над локальним полем.

Нехай K — псевдолокальне поле, тобто повне дискретно нормоване поле з псевдоскінченним полем лишків k, $\mathfrak{g}_K$ (відповідно $\mathfrak{g}_k$) — абсолютна група Галуа поля K (відповідно k), $\overline{K}$ (відповідно $\overline{k}$) — алгебраїчне замикання поля K (відповідно k).

Лема 1.1 ([11]). *Нехай D — скінченний $\mathfrak{g}_k$-модуль. Тоді* $|\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, D)| = |\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, D)|$.

Теорема 3. *Нехай φ — ізогенія між абелевими многовидами A і B над псевдолокальним полем K з полем лишків k, m — порядок ядра ізогенії $\ker\varphi$. Припускаємо, що поле K містить корені з 1 степеня m. Тоді добуток Тейта асоційований на ізогенії φ, $[.,.]_\varphi : \ker\hat{\varphi}(K) \times \operatorname{coker}(\varphi(K)) \longrightarrow K^*$ досконалий.*

Доведення. Використовуємо метод, запропонований П. Бруїном [3] для випадку скінченного поля. Нехай φ — ізогенія між абелевими многовидами над псевдоскінченним полем лишків k. Розглянемо точну послідовність

$$0 \to \ker\varphi \to A \to B \to 0 \tag{3}$$

і оскільки A, B і φ визначені над полем k, то використання $\overline{k}$-точок у цій послідовності дає точну послідовність $\mathfrak{g}_k$-модулів $0 \to \ker\varphi(\overline{k}) \to A(\overline{k}) \overset{\varphi(\overline{k})}{\to} B(\overline{k}) \to 0$, з якої одержуємо точну послідовність груп когомологій $0 \to \mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \to \mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, A(\overline{k})) \overset{\varphi(\overline{k})}{\to} \mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, B(\overline{k})) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, A(\overline{k})) \overset{\varphi(\overline{k})}{\to} \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, B(\overline{k})) \to \ldots$ За означенням $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) = \ker\varphi(k)$, $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, A(\overline{k})) = A(k)$, $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, B(\overline{k})) = B(k)$ і отримуємо $0 \to \ker\varphi(k) \to A(k) \overset{\varphi(k)}{\to} B(k) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, A(\overline{k})) \overset{\varphi(\overline{k})}{\to} \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, B(\overline{k}))$. Групи $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, A(\overline{k}))$ і $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, B(\overline{k}))$ дорівнюють нулю, оскільки поле k — псевдоскінченне. Звідси

$$0 \to \ker\varphi(k) \to A(k) \overset{\varphi(k)}{\to} B(k) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \to 0. \tag{4}$$

З (4) випливає $0 \to B(k)/\varphi(k)(A(k)) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \to 0$. Звідси $B(k)/\varphi(k)(A(k)) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k}))$. Далі, аналогічно розглядаємо ізогенію φ між абелевими многовидами над псевдолокальним полем K. З аналогічної до (3) точної послідовності отримуємо

$$B(K)/\varphi(K)(A(K)) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_K, \ker\varphi(\overline{K})).$$

Використовуючи відомий факт, що $\mathrm{H}^i(\mathfrak{g}_K, \ker\varphi(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^i(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})$ для всіх i, одержуємо при $i = 1$

$$\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_K, \ker\varphi(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \tag{5}$$

і $B(K)/\varphi(K)A(K) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_K, \ker\varphi(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \cong B(k)/\varphi(k)A(k)$.

Звідси $\mathrm{B}(K)/\varphi(K)\mathrm{A}(K) \cong \mathrm{B}(k)/\varphi(k)\mathrm{A}(k)$ і, враховуючи $\operatorname{coker}\varphi(K)$ і $\operatorname{coker}\varphi(k)$, одержуємо

$$\operatorname{coker}\varphi(K) \cong \operatorname{coker}\varphi(k). \tag{6}$$

Розглянемо групи $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker'(\overline{k})) \cong \mathrm{H}^1(\widehat{\mathbb{Z}}, \ker'(\overline{k})) \cong \mathrm{H}^0(\widehat{\mathbb{Z}}, \ker'(\overline{k})) \cong \ker'(k)$ і $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_K, \ker'(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^1(\widehat{\mathbb{Z}}, \ker'(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^0(\widehat{\mathbb{Z}}, \ker'(\overline{K})) \cong \ker'(K)$, де $\widehat{\mathbb{Z}}$ — вільна топологічна група з однією твірною. Звідси, враховуючи (5), одержуємо

$$\ker\varphi(K) \cong \ker\varphi(k). \tag{7}$$

З (6) і (7) одержуємо, що достатньо показати досконалість добутку Тейта на ізогенії над псевдоскінченним полем.

Аналогічна до (4) точна послідовність і лема 1.1 дозволяють визначити досконалий добуток $(\ker\varphi(K))^\vee \times \operatorname{coker}(\varphi(K)) \to K^*$. Враховуючи канонічний ізоморфізм $\varepsilon_\varphi : \ker\hat{\varphi} \to (\ker\varphi)^\vee$, отримуємо, що добуток $\ker\hat{\varphi}(K) \times \operatorname{coker}(\varphi(K)) \longrightarrow K^*$ досконалий. □

Для групи A (відповідно A'), яка визначена над полем K (відповідно k), позначемо через $A(K)$ (відповідно $A'(k)$) її групу K-раціональних точок (відповідно k-раціональних точок), $A_1(K)$ — ядро редукції $A(K) \to \tilde{A}(k)$.

Теорема 4. *Нехай K — n-вимірне ($n \leq 3$) псевдолокальне поле, A — абелевий многовид, визначений над полем K. Припустимо, що A має всі добрі редукції при послідовних редукціях поля K_i, $1 \leq i \leq 3$, φ — ізогенія між абелевими многовидами над полем K, m — порядок ядра ізогенії $\ker\varphi$. Припускаємо, що поле K містить корені з 1 степеня m. Тоді добуток Тейта асоційований на ізогенії φ, $[.,.]_\varphi : \ker\hat{\varphi}(K) \times \operatorname{coker}(\varphi(K)) \longrightarrow K^*$ досконалий.*

Доведення. Міркуємо індукцією за n. Якщо $n = 0$, то одержуємо псевдоскінченне поле, для якого добуток Тейта асоційований на ізогенії між абелевими многовидами, які визначені над цим полем є досконалим, що було встановлено нами раніше.

Якщо $n = 1$, то отримуємо псевдолокальне поле і добуток Тейта асоційований на ізогенії між абелевими многовидами, визначених над цим полем, досконалий. Це випливає з теореми 3.

Якщо $n > 1$, то використовуємо метод, запропонований В.І. Андрійчуком [1] для n-вимірного ($n \leq 3$) псевдолокального поля. Розглянемо точну послідовність редукції $0 \to A_1 \to A \to A' \to 0$, де ядро редукції A_1 є однозначно подільною на m групою. Розглянемо комутативну діаграму з точними рядками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & A(K_n) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & A'(K_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A(K_n) \arrow[r] & A'(K_{n-1}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{8}$$

Застосовуючи лему про змію до (8) одержуємо

$$0 \to \ker\varphi(K_n) \to \ker\varphi(K_{n-1}) \to 0 \to A(K_n)/\varphi A(K_n) \to A'(K_{n-1})/\varphi A'(K_{n-1}) \to 0.$$

Звідси, $\ker\varphi(K_n) \cong \ker\varphi(K_{n-1})$ і $A(K_n)/\varphi A(K_n) \cong A'(K_{n-1})/\varphi A'(K_{n-1})$ та слідуючи міркуванням в доведені теореми 3, отримуємо, що добуток Тейта асоційований на ізогенії досконалий. □

2 Зв'язок між локальним відображенням Артіна і символом Гільберта у випадку n-вимірного загального локального поля

Нагадаємо, що n-вимірним ($n \leq 3$) загальним локальним полем K називається поле, для якого задана послідовність повних дискретно нормованих полів $K = K_n, K_{n-1},...,K_0$, де кожне наступне поле є полем лишків попереднього і поле K_0 квазіскінченне [12].

Лема 2.1 ([1]). *Нехай K — загальне локальне поле, m — просте число, $m \neq charK_0$. Тоді когомологічна m-розмірність cd_mK поля K дорівнює $n+1$ і $\mathrm{H}^{n+1}(K, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

Теорема 5 ([5, 12]). *Нехай K — n-вимірне ($n \leq 3$) загальне локальне поле, K^{ab} — абелеве розширення поля K. Тоді існує гомоморфізм $\theta : K^* \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ з наступними властивостями:*
1) для кожного простого елемента π з поля K і кожного скінченного нерозгалуженого розширення L поля K одержуємо, що $\theta(\pi)|L = Frob_{L/K}$;
2) для кожного скінченного абелевого розширення L поля K отримуємо, що $N_{L/K}(L^*)$ міститься в ядрі відображення $a \to \theta(a)|L$ і θ індукує ізоморфізм $\theta_{L/K} : K^*/N_{L/K} \to \mathrm{Gal}(L/K)$;
3) підгрупа N групи K^* має вигляд $N_{L/K}(L^*)$ для деякого скінченного абелевого розширення L поля K, $([L:K], char(k)) = 1$, якщо вона має скінченний індекс і відкрита.

Означення 2.1. *Гомоморфізм θ з теореми 5 називається локальним відображенням Артіна.*

Лема 2.2 ([12]). *Нехай G — скінченна група, B — G-модуль, $f : G \to B$ — 1-коцикл, $\overline{f} \in \mathrm{H}^1(G,B)$ — клас когомологій f, $\overline{g} \in \widehat{\mathrm{H}}^{-2}(G,\mathbb{Z})$, $f(s) \in B$ така, що $Nf(s) = 0$, де N взяте із властивості 3 теореми 5. Тоді для кожного $g \in G$ маємо $\overline{g}\overline{f} = \overline{f(s)_0} \in \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G,B)$, де $\overline{f(s)_0}$ — канонічний образ елемента $f(s) \in B$ в $\widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G,B)$.*

Означення 2.2. *Група P показника m — це група, для якої виконується умова $p^m = e$ для всіх $p \in P$.*

Означення 2.3. *Розширення L/K поля K називається розширенням показника m, якщо воно є розширенням Галуа і група Галуа є групою показника m.*

Теорема 6 ([7]). *Нехай K — поле, m — натуральне число, взаємно просте з $char\, K$ і припускаємо, що всі корені степеня m з 1 знаходяться в K, B — підгрупа в K^* така, що $K^{*m} \subset B$, $K_B = K(B^{1/m})$. Тоді K_B — розширення Куммера (абелеве розширення показника m) і маємо білінійне відображення $(\cdot,\cdot) : \mathrm{Gal}(K_B/K) \times B \to \mu_m(\overline{K})$; $(g,a) = \frac{g\alpha}{\alpha}$, де $\alpha^m = a, g \in \mathrm{Gal}(K_B/K), a \in B$. Тоді ядро зліва даного відображення дорівнює 1, з справа — K^{*m} і розширення K_B/K — скінченне $\Longleftrightarrow$ $[B : K^{*m}]$ — скінченне. У цьому випадку $B/K^{*m} \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K_B/K), \mu_m(\overline{K}))$.*

Відомо, що існує inv-ізоморфізм локальної теорії полів класів для загальних локальних полів [5, 12] $inv\colon \mathrm{H}^2(G, K_s^*) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $inv\colon \mathrm{H}^2(G, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^2(G, \overline{K}^*)_m \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, де K_s^* — сепарабельне замикання поля K. Образ елемента $\beta \in \mathrm{H}^2(G, K_s^*)$ при відображені inv називається інваріантом елемента β.

Теорема 7. *Нехай K — n-вимірне ($n \leq 3$) загальне локальне поле. Тоді*

$$\theta(b)(a^{1/m}) = (a,b)a^{1/m}. \tag{9}$$

Доведення. У випадку $n = 1$ отримуємо загальне локальне поле і нами було вже встановлено, що (9) має місце. Для зручності читача нагадаємо доведення. Використовуємо метод, запропонований М. Папікіяном [10] для випадку локального поля. Нехай L/K — максимальне абелеве m-розширення зі скінченною групою G, $a \in K^*$, K^*/K^{*m} — скінченна група. Тоді група G — скінченна, оскільки $G \cong K^*/K^{*m}$.

Нехай $a \in K^*$. Враховуючи теорему 6, визначимо $\varphi_a \in \mathrm{Hom}(G, \mu_m(\overline{K}))$ наступним чином:

$$\varphi_a(g) = \frac{g(a^{1/m})}{a^{1/m}}. \tag{10}$$

Тоді формула $\theta(b)(a^{1/m}) = (a,b)a^{1/m}$, врахувавши (10) при $g = \theta(b)$, набуде вигляду $(a,b) = \varphi_a(\theta(b))$. З точної послідовності $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ одержуємо точну послідовність груп когомологій

$$\ldots \to \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G,\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} \widehat{\mathrm{H}}^{0}(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{0}(G,\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{0}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
$$\xrightarrow{\delta} \widehat{\mathrm{H}}^{1}(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{1}(G,\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} \widehat{\mathrm{H}}^{2}(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{2}(G,\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{2}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \ldots,$$

де δ — зв'язуючі гомоморфізми [4].

Нехай $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $\delta_\chi \in \mathrm{H}^2(G,\mathbb{Z})$ — образ характера χ відносно зв'язуючого відображення $\delta : \mathrm{H}^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(G,\mathbb{Z})$, $\overline{\alpha} \in \widehat{\mathrm{H}}^0(G, L^*)$ — образ елемента $\alpha \in K^*$. Тоді $\cup$-добуток $\overline{\alpha}\,\delta_\chi \in \mathrm{H}^2(G, L^*)$ і $\chi(\theta(b)) = inv(\overline{\alpha}\,\delta_\chi)$ [12].

Отже, потрібно довести рівність $\chi(\theta(b)) = inv(\overline{\alpha}\,\delta_\chi)$. Розглянемо ізоморфізм $\theta^{-1}_{L/K} : G \to K^*/N_{L/K}(L^*)$. Тоді за означенням $\theta^{-1}_{L/K}$, одержуємо $\theta(b)\cdot u_{L/K} = \overline{\alpha} \in \widehat{\mathrm{H}}^0(G, L^*)$ і $\overline{\alpha}\cdot\delta_\chi = \theta(b)\cdot u_{L/K}\cdot\delta_\chi$. Далі, використовуючи асоціативність $\cup$-добутку, отримаємо $\overline{\alpha}\cdot\delta_\chi = u_{L/K}\cdot(\theta(b)\cdot\delta_\chi) = u_{L/K}\cdot\delta(\theta(b)\cdot\chi)$, де $\theta(b)\cdot\chi \in \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Групу $\widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ототожнюємо з групою $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ за умови, що $[L : K] = n$, а групу $\widehat{\mathrm{H}}^{-2}(G, \mathbb{Z})$ з G за умови, що гарантовано виконується рівність $\theta(b)\cdot\chi = \chi(\theta(b))$ (лема 2.2).

Розглянемо $\delta : \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \widehat{\mathrm{H}}^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Нехай $\theta(b)\cdot\chi = r/n$, де $r \in \mathbb{Z}$. Тоді $\delta(r/n) \in \widehat{\mathrm{H}}^0(G, \mathbb{Z})$ і $\delta(r/n) = r$ та

$$inv(\overline{\alpha}\cdot\delta_\chi) = inv(u_{L/K}\cdot(\theta(b)\cdot\delta_\chi)) = inv(u_{L/K}\cdot\delta(\theta(b)\cdot\chi)) = inv(u_{L/K}\cdot r) = r/n = \chi(\theta(b)),$$

де $u_{L/K}$ — фундаментальний клас групи $\mathrm{H}^2(G, L^*)$.

Для того, щоб показати, що рівність (9) має місце для n-вимірного загального локального поля, використовуємо метод, запропонований В.І. Андрійчуком [1] для n-вимірного ($n \leq 3$) загального локального поля. При $n = 0$ одержимо квазіскінченне поле K_0. Відомо, що його абсолютна група Галуа ізоморфна групі $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Як було вже згадано вище, якщо $n = 1$, то отримуємо загальне локальне поле K_1 і рівність (9) залишається вірною. Покажемо, що зв'язок між локальним відображенням Атріна і символом Гільберта (9) зберігається і для випадку, коли $n > 1$. Розглянемо точну послідовність [1]

$$0 \to \mathrm{H}^r(K_{i-1}, \mu_m(\overline{K})) \to \mathrm{H}^r(K_i, \mu_m(\overline{K})) \to \mathrm{H}^{r-1}(K_{i-1}, \mu_m(\overline{K})), \qquad (11)$$

де $1 \leq i \leq n+1, r \geq 1$. Враховуючи, що $cd_m K_{n-1} = n$, і приймаючи $r = n+1$ в (11), одержуємо $\mathrm{H}^{n+1}(K_{n-1}, \mu_m(\overline{K})) = 0$ і $\mathrm{H}^{n+1}(K, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^n(K_{n-1}, \mu_m(\overline{K}))$. За лемою 2.1 існує ізоморфізм $\mathrm{H}^{n+1}(K, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Дійсно, повторюючи аналогічним чином, отримуємо $\mathrm{H}^{n+1}(K, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^n(K_{n-1}, \mu_m(\overline{K})) \cong \ldots \cong \mathrm{H}^2(K_1, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^1(K_0, \mu_m(\overline{K})) = \mathrm{Hom}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Далі аналогічні міркування, які використані при доведенні (9) для загального локального поля, переносяться на випадок n-вимірного ($n \leq 3$) загального локального поля. $\square$

Автор висловлює подяку В.І. Андрійчуку за постановку задач та допомогу при їх розв'язанні.

References

[1] Andriychuk V.I. *Algebraic curves over n-dimensional general local fields.* Mat. Stud. 2001, **15** (2), 209–214.

[2] Ax J. *The elementary theory of finite fields.* Ann. Math. 1968, **88** (2), 239–271.

[3] Bruin P. *The Tate pairing for abelian varieties over finite fields.* J. de theorie des nombres de Bordeaux 2011, **23** (2), 323–328.

[4] Cassels J.W.S., Fröhlich A. (Eds.). Algebraic Number Theory. Mir, Moscow, 1969. (in Russian)

[5] Fesenko I.B., Vostokov S.V. Local Fields and Their Extensions. Transl. Math. Monogr., Amer. Math. Soc., 2001.

[6] Fried M., Jarden M. Field arithmetic. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[7] Lang S. Fundamentals of Diophantine Geometry. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1983.

[8] Nesteruk V.I. *On nondegeneracy of Tate product for curves over pseudofinite fields.* Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 2010, **72**, 195–200. (in Ukrainian)

[9] Nesteruk V.I. *On nondegeneracy of Tate pairing for elliptic curves with good reduction over pseudolocal field.* Appl. Problems of Mechanics and Math. 2010, **8**, 37–40. (in Ukrainian)

[10] Papikian M. On Tate Local Duality. Seminar "Kolyvagin's Appl. of Euler Systems to Elliptic curves", Massachusetts Inst. of Technology, Spring, 2000. `www.math.ucdavis.edu/~osserman/semold/#desc`

[11] Platonov V., Rapinchuk A. Algebraic groups and number theory. Academic Press, Boston, 1994.

[12] Serre J.P. Corps locaux. Hermann, Paris, 1968.

[13] Schaefer E. F. A new proof for the non-degeneracy of the Frey-Rück pairing and a connection to isogenies over the base field. World Scientific Publishing, Hackensack, 2005.

Надійшло 24.09.2012

Nesteruk V.I. *On the Kolyvagin's formula, the Tate pairing associated to an isogeny, the local Artin map and the Hilberts symbol.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 94–101.

A proof of nondegeneracy of the Tate pairing and Kolyvagin's formula for elliptic curves with good reductions over an n-dimensional ($n \leq 3$) pseudolocal field, the Tate pairing associated to an isogeny between abelian varieties over pseudolocal field and an n-dimensional ($n \leq 3$) pseudolocal field, and the relations of local Artin map and of the Hilbert symbol for an n-dimensional ($n \leq 3$) general local field is given.

Key words and phrases: pseudolocal field, n-dimensional pseudolocal field, n-dimensional general local field, isogeny, Tate pairing associated to an isogeny, local Artin map, Hilbert symbol, Kolyvagin's formula.

Нестерук В.И. *О формуле Колывагина, спаривание Тэйта ассоциированого на изогении, локальном отображении Артина и символе Гильберта* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 94–101.

Приведено доказательство невырожденности спаривания Тэйта и формулы Колывагина для эллиптических кривых с невырожденными редукциями над n-мерными ($n \leq 3$) псевдолокальными полями, досконалость спаривания Тэйта ассоциированого на изогении для абелевых многообразий над псевдолокальным полем и над n-мерным ($n \leq 3$) псевдолокальным полем, и связь локального отображения Артина и символа Гильберта для n-мерного ($n \leq 3$) общего локального поля.

Ключевые слова и фразы: псевдолокальное поле, n-мерное псевдолокальное поле, n-мерное общее локальное поле, изогения, спаривание Тэйта ассоциированого на изогении, локальное отображения Артина, символ Гильберта, формула Колывагина.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.5

Новіков О.О., Ровенська О.Г.

НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВИСОКОЇ ГЛАДКОСТІ ПРЯМОКУТНИМИ СУМАМИ ФУР'Є

Новіков О.О., Ровенська О.Г. *Наближення періодичних функцій високої гладкості прямокутними сумами Фур'є* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 102–109.

Отримано асимптотичні формули для точних верхніх меж відхилень прямокутних сум Фур'є на класах періодичних функцій двох змінних високої гладкості. Знайдені співвідношення за певних умов надають розв'язок відомої задачі Колмогорова–Нікольського для прямокутних сум Фур'є і вказаних класів функцій.

Ключові слова і фрази: задача Колмогорова-Нікольського, (ψ,β)-похідна, прямокутні суми Фур'є.

Слов'янський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна

E-mail: o.rovenskaya@mail.ru (Ровенська О.Г.)

Вступ

Класи періодичних $\overline{\psi}$-диференційовних функцій запроваджено в роботі [6] у такий спосіб. Нехай

$$S[f]=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\sum_{k=0}^{\infty}A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції $f\in L$ і пара систем чисел $(\psi_1(k),\psi_2(k))$ задовольняє умову $\overline{\psi}^2(k)=\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)\neq 0$, $k=0,1,\ldots$. Якщо вираз

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)}A_k(f;x)-\frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)}\tilde{A}_k(f;x)\right),$$

де $\tilde{A}_k(f;x)=a_k(f)\sin kx-b_k(f)\cos kx$, є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то ця функція називається $\overline{\psi}$-похідною функції f і позначається $f^{\overline{\psi}}$. Підмножину неперервних функцій $f\in L$, які мають майже скрізь обмежені $\overline{\psi}$-похідні позначають символом $C_{\infty}^{\overline{\psi}}$.

Якщо існують послідовність $\psi(k)$ і дійсне число β такі, що $\psi_1(k)=\psi(k)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(k)=\psi(k)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, то класи $C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ переходять у класи (ψ,β)-диференційовних функцій, що позначаються $C_{\beta,\infty}^{\psi}$. У випадку, коли $\psi(k)=q^k$, $q\in(0;1)$, $k\in\mathbb{N}$, класи $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ позначаються $C_{\beta,\infty}^{q}$, складаються з 2π-періодичних функцій, які дозволяють продовження до функцій $f(z)=f(x+iy)$, регулярних у смузі $|y|<\ln\frac{1}{q}$ (див., напр., [7, с. 31]), і називаються аналітичними функціями дійсної змінної чи інтегралами Пуассона.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 42A10.

Класи (ψ,β)–диференційовних періодичних функцій двох змінних, які дозволяють окремо враховувати властивості звичайних і мішаних частинних похідних, визначимо в такий спосіб (див., напр., [10, 8]). Нехай R^2 — евклідів простір з елементами $\vec{x}=(x_1,x_2)$, $T^2=[-\pi;\pi]\times[-\pi;\pi]$ — квадрат зі стороною 2π,

$$N^2=\{\vec{x}\in R^2\mid x_i\in\mathbb{N},\ i=1,2\},\qquad N_*^2=\{\vec{x}\in R^2\mid x_i\in\mathbb{N}_*=\mathbb{N}\cup\{0\},\ i=1,2\},$$

$$N_i^2=\{\vec{x}\in R^2\mid x_i\in\mathbb{N},\ x_j\in\mathbb{N}_*,\ i\neq j\},\qquad E^2=\{\vec{x}\in R^2\mid x_i\in\{0;1\},\ i=1,2,\}.$$

Через $L(T^2)$ позначимо множину 2π-періодичних за кожною зі змінних та сумовних на квадраті T^2 функцій $f(\vec{x})=f(x_1,x_2)$.

Нехай $f\in L(T^2)$. Кожній парі точок $\vec{s}\in E^2,\vec{k}\in N_*^2$ поставимо у відповідність величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)=\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}f(x_1,x_2)\cos\left(k_1x_1-\frac{s_1\pi}{2}\right)\cos\left(k_2x_2-\frac{s_2\pi}{2}\right)dx_1dx_2.$$

Величини $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s}\in E^2,\vec{k}\in N_*^2$ є коефіцієнтами Фур'є функції $f(\vec{x})$ [8].

Кожному вектору $\vec{k}\in N_*^2$ поставимо у відповідність гармоніку

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^2}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos\left(k_1x_1-\frac{s_1\pi}{2}\right)\cos\left(k_2x_2-\frac{s_2\pi}{2}\right)$$

а також величини

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_1}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^2}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos\left(k_1x_1-(s_1+1)\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k_2x_2-\frac{s_2\pi}{2}\right),$$

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_2}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^2}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos\left(k_1x_1-\frac{s_1\pi}{2}\right)\cos\left(k_2x_2-(s_2+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

що є гармоніками, спряженими до $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ за змінними x_1 і x_2 відповідно.

Наслідуючи [8], ряд Фур'є функції $f(\vec{x})$ визначимо співвідношенням

$$S[f]=\sum_{\vec{k}\in N_*^2}2^{-q(\vec{k})}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

де $q(\vec{k})$ — кількість нульових координат вектора $\vec{k}$.

Нехай $f\in L(T^2)$ і $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i=1,2$, $j=1,2$ — фіксовані набори систем чисел, $k\in\mathbb{N}_*$. Покладемо

$$\overline{\psi}_i(k)=\sqrt{\psi_{i1}^2(k)+\psi_{i2}^2(k)},\qquad \overline{\Psi}_i(k)=\sqrt{\Psi_{i1}^2(k)+\Psi_{i2}^2(k)}$$

і будемо вважати, що виконано умови: $\overline{\psi}_i(k)\neq 0$, $\overline{\Psi}_i(k)\neq 0$, $k\in\mathbb{N}_*$, $\psi_{i1}(0)=1$, $\Psi_{i1}(0)=1$, $\psi_{i2}(0)=0$, $\Psi_{i2}(0)=0$, $i=1,2$. Відтак припустимо, що вираз

$$\sum_{\vec{k}\in N_i^2}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}\overline{\psi}_i^2(k_i)}\left[\psi_{i1}(k_i)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})-\psi_{i2}(k_i)A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x})\right]$$

є рядом Фур'є деякої функції з $L(T^2)$. Позначимо її $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})=\frac{\partial^{\overline{\psi}_i}f(\vec{x})}{dx_i}$ та назвемо $\overline{\psi}_i$-похідною функції $f(\vec{x})$ за змінною x_i, $i=1,2$.

Мішаною $\overline{\Psi}$-похідною за змінними x_i, $i=1,2$, за аналогією до означення звичайної мішаної похідної, будемо називати функцію $f^{\overline{\Psi}}(\vec{x})$, яка задається співвідношенням

$$f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_2}}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^{\overline{\Psi}_1} f(\vec{x})}{\partial x_1}\right).$$

Для заданого набору функцій $\psi_{ij}, \Psi_{ij}, i = 1,2\ j = 1,2$, символом $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ позначимо множину неперервних функцій $f \in L(T^2)$, що мають майже скрізь обмежені в розумінні плоскої міри $\overline{\Psi}$- і $\overline{\psi}_i$-похідні $\operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\Psi}}(\vec{x})| \le 1$, $\operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})| \le 1$, $i = 1,2$, $\vec{x} \in T^2$.

Вивченню апроксимаційних властивостей цих класів присвячено роботи [10, 3, 5, 8].

Якщо для наборів функцій $\psi_{ij}(k)$ і $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1,2$, $j = 1,2$, що визначають класи $C_\infty^{2\overline{\psi}}$, існують функції $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ і числа $\beta_i, \beta_i^* \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$, такі, що

$$\psi_{i1}(k) = \psi_i(k)\cos\frac{\beta_i\pi}{2}, \quad \psi_{i2}(k) = \psi_i(k)\sin\frac{\beta_i\pi}{2},$$

$$\Psi_{i1}(k) = \Psi_i(k)\cos\frac{\beta_i^*\pi}{2}, \quad \Psi_{i2}(k) = \Psi_i(k)\sin\frac{\beta_i^*\pi}{2},$$

то $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ є класами (ψ,β)-диференційовних функцій, які було введено в роботі [10]. Будемо позначати такі класи $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$. Якщо, крім того, для чисел $r > 0, s > 0, r_1 \ge r, s_1 \ge s$ виконано умови $\Psi_1(k) = k^{-r}$, $\Psi_2(k) = k^{-s}$, $\psi_1(k) = k^{-r_1}$, $\psi_2(k) = k^{-s_1}$, $\beta_1 = r$, $\beta_1^* = s$, $\beta_2 = r_1$, $\beta_2^* = s_1$, то класи $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$ співпадають з класами $W_{r_1,s_1}^{r,s}$. У роботі [5] вивчено питання наближення класів $W_{r_1,s_1}^{r,s}$ прямокутними сумами Фур'є

$$S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = S_{n_1,n_2}(f;\vec{x}) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1} 2^{-q(\vec{k})}A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$$

та знайдено асимптотичну при $n_i \to \infty, i = 1,2$ рівність для точних верхніх меж відхилень прямокутних сум Фур'є $S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ узятих по класам $W_{r_1,s_1}^{r,s}$

$$\mathcal{E}(W_{r_1,s_1}^{r,s};S_{\vec{n}}) = \frac{4\ln n_1}{\pi^2 n_1^{r_1}} + \frac{4\ln n_2}{\pi^2 n_2^{s_1}} + O(1)\left(\frac{\ln n_1 \ln n_2}{n_1^r n_2^s} + \frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{s_1}}\right).$$

Нехай послідовності, які визначають клас, задаються співвідношеннями $\psi_i(k) = q_i^k$, $q_i \in (0;1)$, $i = 1,2,\ldots$. Послідовності $\Psi_i(k)$ задаються подібним чином: $\Psi_i(k) = Q_i^k$, $Q_i \in (0;1)$, $i = 1,2,\ldots$. У цьому випадку класи $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$ за аналогією до класів функцій однієї змінної позначаються $C_{\beta,\infty}^{2q}$.

Із результатів роботи С.М. Нікольського [1] випливає асимптотична рівність для точних верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах аналітичних функцій однієї змінної $C_{\beta,\infty}^q$

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^q;S_n) = \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^q} ||f(x) - S_n(f;x)|| = \frac{8q^n}{\pi^2}K(q) + O(1)q^n n^{-1},$$

де

$$K(q) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}}$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n. С.Б. Стечкін [4] цей результат довів іншим методом, який дозволив уточнити залишковий член останньої рівності.

У роботі [3] розглянуто питання наближення класів функцій двох змінних $C_{\beta,\infty}^{2q}$ прямокутними сумами Фур'є $S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ і отримано асимптотичну формулу

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{2q};S_{\vec{n}}) = \frac{8q_1^{n_1}}{\pi^2}K(q_1) + \frac{8q_2^{n_2}}{\pi^2}K(q_2) + O(1)\left(\frac{q_1^{n_1}}{n_1} + \frac{q_2^{n_2}}{n_2} + Q_1^{n_1}Q_2^{n_2}\right), \quad n_i \to \infty, \quad i = 1,2.$$

Позначимо символом D_q множину послідовностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких має місце співвідношення

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q \in (0;1).$$

Для точних верхніх меж відхилень прямокутних сум Фур'є на класах функцій однієї змінної $C_{\beta,\infty}^{\psi}$, $\psi(k) \in D_q$ у роботі [9] отримано при $n \to \infty$ асимптотичну формулу

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{\psi};S_n) = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}K(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right),$$

де

$$\varepsilon_n = \sup_{k\ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|.$$

У роботі отримано асимптотичну при $n_i \to \infty$, $i = 1,2$ формулу, що є двовимірним аналогом останньої рівності для класів функцій $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$, $\psi_i(k) \in D_{q_i}$, $q_i \in (0;1)$, $\Psi_i(k) \in D_{Q_i}$, $Q_i \in (0;1)$, $i = 1,2$. Аналогічний результат для відхилень прямокутних сумм Валле Пуссена було отримано в роботі [2].

1 ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Теорема 1. *Нехай $\psi_i(k) \in D_{q_i}$, $q_i \in (0;1)$, $\Psi_i(k) \in D_{Q_i}$, $Q_i \in (0;1)$, $\beta_i, \beta_i^* \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$. Тоді при $n_i \to \infty$, $i = 1,2$ має місце асимптотична формула*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{2\psi};S_{\vec{n}}) = \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^{2\psi}} ||f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C = \frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1,2}\psi_i(n_i)K(q_i) \\ +O(1)\left[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)q_i}{(1-q_i)n_i} + \sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} + \Pi_{n_1,n_2}^{Q_1,Q_2}(\Psi_1,\Psi_2)\right],\end{aligned} \tag{1}$$

де

$$K(q) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}},$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду,

$$\varepsilon_m(\psi) = \sup_{k\ge m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|, \quad q = \lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}, \tag{2}$$

$$\Pi_{n_1,n_2}^{Q_1,Q_2}(\Psi_1,\Psi_2) = \prod_{i=1,2}\frac{\Psi_i(n_i)}{1-Q_i}\left(1 + \frac{\varepsilon_{n_1}(\Psi_1)}{1-Q_1} + \frac{\varepsilon_{n_2}(\Psi_2)}{1-Q_2} + \frac{\varepsilon_{n_1}(\Psi_1)\varepsilon_{n_2}(\Psi_2)}{(1-Q_1)(1-Q_2)}\right), \tag{3}$$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n_i, q_i, Q_i, β_i, β_i^*, $i = 1,2$.

Доведення. Використовуючи міркування роботи [3], можна показати, що

$$\rho_{\vec n}(f;\vec x) = f(\vec x) - S_{\vec n}(f;\vec x) = \sum_{i=1,2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}(\vec x + t_i\vec e_i)\sum_{k=n_i}^{\infty}\psi_i(k_i)\cos(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2})dt_i$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} f^{\overline{\Psi}}(\vec x+\sum_{j=1,2}t_j\vec e_j)\prod_{j=1,2}\sum_{\nu_j=n_j}^{\infty}\Psi_{\nu_j}(\nu_j)\cos(\nu_jt_j+\frac{\beta_j^*\pi}{2})dt_j.$$

Надалі знадобиться допоміжне твердження (див., напр., [9]).

Лема 1.1. *Нехай $\psi(k)\in D_q$, $q\in(0;1)$. Тоді для довільної послідовності чисел γ_k, $k=1,2,\ldots$, має місце рівність*

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos(kt-\gamma_k) = \psi(n)\left[q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt-\gamma_k)+r_n(t;\psi)\right],$$

у якій

$$r_n(t,\psi)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{l=0}^{i-1}\frac{\psi(n+l+1)}{\psi(n+l)}-q^i\right)\cos((n+i)t-\gamma_{n+i}),$$

крім того, починаючи з деякого n_0,

$$|r_n(t;\psi)|\le\frac{\varepsilon_n(\psi)}{(1-q-\varepsilon_n(\psi))(1-q)}, \tag{4}$$

де $\varepsilon_n(\psi)$ визначено (2).

Використовуючи твердження леми, маємо

$$\rho_{\vec n}(f;\vec x)=\sum_{i=1,2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}(\vec x+t_i\vec e_i)\left[\psi_i(n_i)q_i^{-n_i}\sum_{k=n_i}^{\infty}q_i^{k_i}\cos(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2})+\psi_i(n_i)r_{n_i}(t_i;\psi_i)\right]dt_i$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}f^{\overline\Psi}(\vec x+\sum_{j=1,2}t_j\vec e_j)\prod_{j=1,2}\left[\Psi_j(n_j)Q_j^{-n_j}\sum_{\nu_j=n_j}^{\infty}Q_j^{\nu_j}\cos(\nu_jt_j+\frac{\beta_j^*\pi}{2})+\Psi_j(n_j)r_{n_j}(t_j;\Psi_j)\right]dt_j$$

$$=\frac1\pi\sum_{i=1,2}\psi_i(n_i)q_i^{-n_i}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline\psi_i}(\vec x+t_i\vec e_i)\sum_{k=n_i}^\infty q_i^{k_i}\cos(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2})dt_i$$

$$+\frac1\pi\sum_{i=1,2}\psi_i(n_i)\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline\psi_i}(\vec x+t_i\vec e_i)r_{n_i}(t_i;\psi_i)dt_i-\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}f^{\overline\Psi}(\vec x+\sum_{j=1,2}t_j\vec e_j)\sum_{\xi\subset\{1,2\}}\prod_{s\in\{1,2\}\setminus\xi}\Psi_s(n_s)Q_s^{-n_s}$$

$$\times\sum_{\nu_s=n_s}^\infty Q_s^{\nu_s}\cos(\nu_st_s+\frac{\beta_s^*\pi}{2})dt_s\prod_{j\in\xi}\Psi_j(n_j)r_{n_j}(t_j;\Psi_j)dt_j.$$

Виконуючи елементарні перетворення, можна показати, що

$$\sum_{k=n}^\infty q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)=q^n\left(\sum_{k=0}^\infty q^k\cos kt\cos(nt+\frac{\beta\pi}{2})-\sum_{k=0}^\infty q^k\sin kt\sin(nt+\frac{\beta\pi}{2})\right)$$

$$=\frac{q^n}{1-2q\cos t+q^2}\left((1-q\cos t)\cos(nt+\frac{\beta\pi}{2})-q\sin t\sin(nt+\frac{\beta\pi}{2})\right)$$

$$=\frac{q^n}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}\right).$$

На підставі останньої рівності та оцінки (4), маємо

$$\rho_{\vec n}(f;\vec x)=\frac1\pi\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline\psi_i}(\vec x+t_i\vec e_i)b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i+O(1)\left[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2}+\Pi_{n_1,n_2}^{Q_1,Q_2}(\Psi_1,\Psi_2)\right], \tag{5}$$

де

$$b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)=\frac{q_i^{n_i}}{(1-2q_i\cos t_i+q_i^2)^{1/2}}\cos\left(n_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{q_i\sin t_i}{1-q_i\cos t_i}\right),$$

а величину $\Pi_{n_1,n_2}^{Q_1,Q_2}(\Psi_1,\Psi_2)$ визначено співвідношенням (3).

Оскільки $f(\vec x)\in C^{2\psi}_{\beta,\infty}$, то

$$\mathcal E(C^{2\psi}_{\beta,\infty};S_{\vec n})\le\frac1\pi\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i+O(1)\left[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2}+\Pi_{n_1,n_2}^{Q_1,Q_2}(\Psi_1,\Psi_2)\right]. \tag{6}$$

Знайдемо функцію $f_0(\vec x)\in C^{2\psi}_{\beta,\infty}$ для якої має місце співвідношення

$$\begin{aligned}\rho_{\vec n}(f_0;\vec 0)=&\frac1\pi\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i\\&+O(1)\left[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)q_i}{(1-q_i)n_i}+\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2}+\Pi_{n_1,n_2}^{Q_1,Q_2}(\Psi_1,\Psi_2)\right].\end{aligned} \tag{7}$$

На підставі співвідношення (5), для довільної $f\in C^{2\psi}_{\beta,\infty}$ можна записати

$$\rho_{\vec n}(f;\vec 0)=\frac1\pi\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline\psi_i}(\vec 0+t_i\vec e_i)b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i+O(1)\left[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2}+\Pi_{n_1,n_2}^{Q_1,Q_2}(\Psi_1,\Psi_2)\right]. \tag{8}$$

Покажемо, що кожну функцію $\operatorname{sign} b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$, $i=1,2$, можна змінити на множині точок, міра якої не перевищує $Kq_in_i^{-1}(1-q_i)^{-1}$ так, щоб для отриманих функцій $y_i(t_i)$ виконувалась умова $\int_{-\pi}^{\pi}y_i(t_i)dt_i=0$. Вивчимо функцію $b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$. Позначимо

$$\Phi(t_i)=\operatorname{arctg}\frac{q_i\sin t_i}{1-q_i\cos t_i}.$$

Розглянемо інтервал $(0;\pi)$ на якому функція $\Phi(t_i)$ неперервна й виконується умова

$$0\le\Phi(t_i)\le\frac\pi2. \tag{9}$$

Крім того, для $\forall t_i\in(0;\pi)$

$$|\Phi'(t_i)|=\left|\frac{q_i\cos t_i-q_i^2}{1-2q_i\cos t_i+q_i^2}\right|\le\frac{q_i}{1-q_i}. \tag{10}$$

Функція $b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ на проміжку $(0;\pi)$ дорівнює нулю й змінює знак тільки в точках вигляду $t_{ik}=\frac{\frac\pi2+k\pi-\frac{\beta_i\pi}{2}-\Phi(t_{ik})}{n_i}$, $k=3,4,\ldots,n_i-1$. Знайдемо довжини проміжків $[t_{ik};t_{i(k+1)}]$ і

$[t_{i(k+1)};t_{i(k+2)}]$

$$t_{i(k+1)}-t_{ik}=\frac{\pi}{n_i}-\frac{\Phi(t_{ik+1})-\Phi(t_{ik})}{n_i},\qquad t_{i(k+2)}-t_{i(k+1)}=\frac{\pi}{n_i}-\frac{\Phi(t_{i(k+2)})-\Phi(t_{i(k+1)})}{n_i}.$$

Ураховуючи (10), бачимо, що різниця довжин цих проміжків $|(t_{i(k+2)}-t_{i(k+1)})-(t_{i(k+1)}-t_{ik})|$ не перевищує

$$\frac{|\Phi(t_{i(k+2)})-\Phi(t_{i(k+1)})|+|\Phi(t_{i(k+1)})-\Phi(t_{ik})|}{n_i}\le\frac{2q_i(t_{i(k+1)}-t_{ik})}{n_i(1-q_i)}.$$

Унаслідок (9), маємо

$$\frac{2k\pi-\beta_i\pi}{2n_i}\le t_{ik}\le\frac{\pi+2k\pi-\beta_i\pi}{2n_i},\qquad \frac{2k\pi+2\pi-\beta_i\pi}{2n_i}\le t_{i(k+1)}\le\frac{3\pi+2k\pi-\beta_i\pi}{2n_i},$$

$$\frac{\pi}{2n_i}\le t_{i(k+1)}-t_{ik}\le\frac{3\pi}{2n_i}. \tag{11}$$

Отже, різниця довжин проміжків $[t_{ik};t_{i(k+1)}]$ і $[t_{i(k+1)};t_{i(k+2)}]$ не більша ніж $\frac{3q_i\pi}{2n_i^2(1-q_i)}$. Функція $b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ зберігає знак на цих проміжках, причому праворуч і ліворуч від $t_{i(k+1)}$ знаки різні. Таким чином, функцію $\operatorname{sign} b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ на проміжку $[t_{ik};t_{i(k+2)}]$ можна змінити на множині, міра якої $\le\frac{3q_i\pi}{2n_i^2(1-q_i)}$ так, щоб для отриманої функції $y_i(t_i)$ середнє значення на цьому відрізку дорівнювало нулю. Завдяки (11) кількість проміжків, на яких функція $b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ змінює знак, не перевищує $4n_i$. Аналогічні міркування можна провести для проміжку $(-\pi;0)$. Отже, функції, побудовані на $(-\pi;\pi)$, мають властивості $\int\limits_{-\pi}^{\pi}y_i(t_i)dt_i=0$ і відрізняються від $\operatorname{sign} b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ на множинах, міри яких не перевищують $Kq_in_i^{-1}(1-q_i)^{-1}$, $i=1,2$.

Відтак побудуємо функції $\varphi_i(t_1;t_2)=y_i(t_i)$, $\vec{t}\in T^2$, і функції $f_i(\vec{x})$ такі, що $(f_i)^{\overline{\psi}_i}=\varphi_i(\vec{x})$. Можна показати (див., напр., [3]), що функція $f_0(\vec{x})=f_1(\vec{x})+f_2(\vec{x})$ задовольняє умову $(f_0)^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})=\varphi_i(\vec{x})$, $i=1,2$. Через це $f_0(\vec{x})\in C^{2\psi}_{\beta,\infty}$ і справедливим є таке співвідношення

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_0(\vec{0}+t_i\vec{e}_i))^{\overline{\psi}_i}b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i+O(1)\frac{q_i^{n_i+1}}{n_i(1-q_i)}.$$

На підставі (8) можна зробити висновок, що для знайденої функції $f_0(\vec{x})$ має місце співвідношення (7). Поєднуючи (6) і (7), отримаємо

$$\mathcal{E}(C^{2\psi}_{\beta,\infty};S_{\vec{n}})=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i$$
$$+O(1)\left[\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)q_i}{(1-q_i)n_i}+\sum_{i=1,2}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2}+\Pi^{Q_1,Q_2}_{n_1,n_2}(\Psi_1,\Psi_2)\right].$$

Із результатів роботи [1] випливає рівність

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_n^{\beta}(t)|dt=\frac{8q^n}{\pi}K(q)+O(1)\frac{q^n}{n}.$$

Поєднуючи дві останні рівності, отримаємо асимптотичну формулу (1). □

Зазначимо, що рівності $q_i=Q_i$, $i=1,2$, є одними з умов, за яких співвідношення (1) забезпечує розв'язок відповідної задачі Колмогорова–Нікольського (див., напр., [7, с. 57]).

References

[1] Nikol'skii S.M. *Approximation of the functions by trigonometric polynomials in the mean.* News of Acad. of Sc. USSR 1946, **10** (3), 207–256. (in Russian)

[2] Novikov O.A., Rovenska O.G. *Approximation of the periodical functions of high smoothness by the right-angled linear methods.* Computer Research and Modeling 2011, **3** (3), 255–264. (in Russian)

[3] Rukasov V.I., Novikov O.A., Bodraya V.I. *Approximation of the classes of functions of two variables with a high smoothness by the right-angled linear means of Fourier series.* Problems of Aproximation of Functions. Theory and Closely Related Concepts. Works of the Institute of Mathematics, Ukrainian Academy of Sciences 2007, **4** (1), 270–283 (in Russian).

[4] Stechkin S.B. *Estimation of the remainder of Fourier series for the differentiable functions.* Works of Math. Inst. Acad. of Sc. USSR 1980, **45**, 126–151 (in Russian).

[5] Stepanec A.I. *Approximation of some classes of periodic functions two variables by Fourier sums.* Ukrainian Math. J. 1973, **25** (5), 599–609. (in Russian)

[6] Stepanec A. I. Approximation of $\overline{\psi}$-integrals of periodic functions by Fourier sums. Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv, 1996. (in Russian)

[7] Stepanec A.I. Classifcation and approximation of periodic functions. Nauk. Dumka, Kyiv, 1987. (in Russian)

[8] Stepanec A.I., Pachulia N.L. *Multiple Fourier sums on the sets of (ψ,β)-differentiable functions.* Ukrainian Math. J. 1991, **43** (4), 545–555. (in Russian)

[9] Stepanets A.I., Serdyuk A.S. *Approximations by Fourier sums and best approximations on classes of analytic functions.* Ukrainian Math. J. 2000, **52** (3), 375–395. (in Russian) doi: 10.1007/BF02513138

[10] Zaderey P.V. *Integral presentations of deviations of linear means of Fourier series on the classes of differentiable periodic functions of two variables.* Some problems of the theory of functions. Coll. of Sci. works. Institute of Mathematics, Kyiv, 1985, 16–28. (in Russian)

Надійшло 16.06.2012

Novikov O.O., Rovenska O.G. *Approximation of the periodical functions of high smoothness by the right-angled Fourier sums.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 102–109.

We obtain asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of the right-angled Fourier sums taken over classes of periodical functions of two variables of high smoothness. These equalities in corresponding cases guarantee the solvability of the Kolmogorov–Hikol'skii problem for the right-angled Fourier sums on the specified classes of functions.

Key words and phrases: Kolmogorov–Hikol'skii problem, (ψ,β)-derivative, right-angled Fourier sums.

Новиков О.А., Ровенская О.Г. *Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными суммами Фурье* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 102–109.

Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье на классах периодических функций двух переменных высокой гладкости. Эти соотношения в некоторых важных случаях обеспечивают решение известной задачи Колмогорова–Никольского для прямоугольных сумм Фурье и указанных классов функций.

Ключевые слова и фразы: задача Колмогорова–Никольского, (ψ,β)-производная, прямоугольные суммы Фурье.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 510.22

NYKYFORCHYN KH.O.

CONDITIONAL OPERATIONS ON FUZZY NUMBERS

Nykyforchyn Kh.O. *Conditional operations on fuzzy numbers*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 110–113.

An estimate of a joint possibility distribution of two fuzzy numbers, based on fuzzy relations with a third fuzzy variable, is suggested. This leads to the operations of conditional addition and conditional multiplication, of interactive fuzzy numbers for which joint possibility distributions with a fuzzy variable are known.

Key words and phrases: fuzzy arithmetic, possibility distribution.

Taras Shevchenko National University, Kyiv, Ukraine

INTRODUCTION

Simulation and prognosis for natural, economic, and social processes should take into account unavoidable imprecision in input data and parameters, as well as non-determinism, which is inherent to such processes. Therefore fuzzy sets, fuzzy numbers, and fuzzy logic are used extensively in this class of problems [1].

Extension of functions and operations from crisp sets onto fuzzy ones follows the widely known *extension principle* by Lofty Zadeh [4]. In particular, when a function of several variables is extended, a fuzzy joint distribution of the variables is constructed with the assumption of non-interactivity. The latter property is analogous to independence of random variables. Not only such an assumption can be unrealistic, but difficulties arise if the domain of a function of several variables is not the cartesian product of domains for the respective variables.

In the presented paper we construct operations on one- and many-dimensional fuzzy variables that take into account their simultaneous fuzzy relations with other variables. The omitted proofs are straightforward and can be easily reproduced by the reader.

1 JOINT DISTRIBUTION OF INDIRECTLY FUZZY RELATED VARIABLES

In the sequel $\mathbb{I} = [0;1]$ is the unit segment with the standard metric, $\mathbf{1}_M : M \to M$ is the identity mapping from a set M onto itself. Recall that a metric space is called *proper* if all its closed bounded sets are compact. This implies completeness and local compactness, but the converse is not true. From now on all metric space are considered proper, unless otherwise is stated explicitly.

Let (X, d) be such a metric space. A mapping $A : X \to \mathbb{I}$ is called a *(normal upper semicontinuous) fuzzy X-valued variable* if:

2010 *Mathematics Subject Classification:* 03E72, 08A72.

(i) A is upper semicontinuous;

(ii) there is $x \in X$ such that $A(a) = 1$.

A fuzzy X-valued variable A is called *weakly bounded* if the following is also valid:

(iii) the α-cuts $A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geqslant \alpha\}$ for all $\alpha \in (0;1]$ are bounded sets.

The set of all fuzzy X-valued variables is denoted by $\mathcal{F}(X)$, and $\mathcal{F}_0(X)$ is the subset of all weakly bounded fuzzy X-valued variables.

Observe that (i) implies that all α-cuts are closed sets, hence they are *compact*. Moreover, the hypograph of the function A, i.e., the set $\operatorname{hypo} A = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{I} \mid \alpha \leqslant A(x)\}$, is closed as well. This allows to define the distance between X-valued fuzzy variables as the Hausdorff distance between their hypographs:

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \mid \text{for all } x \in X \text{ there are } x_1, x_2, \\ \text{such that } d(x, x_1) \leqslant \varepsilon, A(x) \leqslant B(x_1) + \varepsilon, d(x, x_2) \leqslant \varepsilon, B(x) \leqslant A(x_2) + \varepsilon\}.$$

Thus we avoid negative effects, which appeared in the previous attempts to apply Hausdorff distance to fuzzy numbers [2].

Proposition 1.1. *The metric space $(\mathcal{F}(X), d_H)$ is complete, and the subspace $(\mathcal{F}_0(X), d_H)$ is closed in $(\mathcal{F}(X), d_H)$, therefore is complete.*

Observe that the metric d_H is bounded from the above by 1, hence neither $(\mathcal{F}(X), d_H)$ nor $(\mathcal{F}_0(X), d_H)$ is proper for an unbounded space X.

The number $A(x)$ is usually interpreted as the plausibility of the event "The fuzzy variable A attains the value x", and the function A itself is considered as a possibility distribution for the variable in question. If an Y-valued fuzzy variable B is uniquely determined with an X-valued fuzzy number A via a mapping $f : X \to Y$, then, by Zadeh' extension principle, the fuzzy distribution of B is estimated as follows: $B(y) = \sup\{A(x) \mid x \in X, f(x) = y\}$ for all $y \in Y$. The latter distribution function may fail to be upper semicontinuous, but the following statement holds.

Proposition 1.2. *If the values of an Y-valued fuzzy variable B are determined with the values of $A \in \mathcal{F}_0(X)$ via a continuous mapping f by the above formula, then $B \in \mathcal{F}_0(Y)$,*

$$\operatorname{hypo} B = (f \times \mathbf{1}_{\mathbb{I}})(\operatorname{hypo} A) \cup (Y \times \{0\}),$$

and the correspondence $A \mapsto B$ is a continuous mapping $\mathcal{F}_0(X) \to \mathcal{F}_0(Y)$ (which is denoted by $\mathcal{F}_0(f)$ from now on).

Let $X_1, \ldots, X_k$ be proper metric spaces, $A_1, \ldots, A_k$ weakly bounded fuzzy variables with the values in these spaces. Then $(A_1, \ldots, A_k)$ attains the values in $X_1 \times \cdots \times X_k$. If joint non-interactivity of $A_1, \ldots, A_k$ is assumed, then the standard inference on the possibility distribution if $(A_1, \ldots, A_k)$, by the extension principle, is of the form

$$A_1 \otimes \ldots \otimes A_k(x_1, \ldots, x_k) = A_1(x_1) \wedge \cdots \wedge A_k(x_k),$$

where $\wedge$ is pairwise minimum of real numbers. For interactive variables a joint distribution can differ, but necessarily

$$\mathcal{F}_0(\mathrm{pr}_i)((A_1,\ldots,A_k)) = A_i, \quad i=1,\ldots,k.$$

Assume that, for weakly bounded fuzzy variables $A_1 \in \mathcal{F}_0(X_1)$, $A_2 \in \mathcal{F}_0(X_2)$, $B \in \mathcal{F}_0(Y)$, joint possibility distributions of $(A_1, B) \in \mathcal{F}_0(X_1 \times Y)$ and $(A_2, B) \in \mathcal{F}_0(X_2 \times Y)$ are known. They describe fuzzy relations between the values of the variables A_1, A_2 and the values of B. Following the arguments for the extension principle, we analogously deduce that a reasonable estimate for the distribution of (A_1, A_2, B) is given by

$$A_1 \otimes_B A_2(x_1,x_2,y) = (A_1,B)(x_1,y) \wedge (A_2,B)(x_2,y), \quad x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, y \in Y.$$

Proposition 1.3. *The introduced above mapping*

$$\otimes_{\ldots} : \{(C_1,C_2) \in \mathcal{F}_0(X_1 \times Y) \times \mathcal{F}_0(X_2 \times Y) \mid \mathcal{F}_0(\mathrm{pr}_2)(C_1) = \mathcal{F}_0(\mathrm{pr}_2)(C_2)\} \to \mathcal{F}_0(X_1 \times X_2 \times Y)$$

is continuous.

Remark. *The equalities*

$$\mathcal{F}_0(\mathrm{pr}_{13})(A_1 \otimes_B A_2) = (A_1,B), \quad \mathcal{F}_0(\mathrm{pr}_{23})(A_1 \otimes_B A_2) = (A_2,B),$$

are obviously valid, i.e., the suggested estimate is compatible with the input information.

2 Conditional fuzzy arithmetic

From now on we consider the sets $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, with the metrics that are determined by any of the equivalent norms

$$\|(a_1,a_2,\ldots,a_n)\|_p = (|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p)^{\frac{1}{p}},$$

for $p \in [1,+\infty)$, or

$$\|(a_1,a_2,\ldots,a_n)\|_\infty = \max\{|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|\}.$$

The choice of norms does not affect the validity of the following statements. The obtained metric space $\mathbb{R}^n$ is proper, consequently, $(\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n), d_H)$ is a complete space.

Let X be a proper metric space, and let weakly bounded joint possibility distributions of $\mathbb{R}$-valued variables A_1, A_2 with an X-valued variable B be given. Having estimated a joint distribution of (A_1, A_2, B) by the function $A_1 \otimes_B A_2$ that was constructed above, we define the sum and the product of A_1 and A_2 over B as the weakly bounded $\mathbb{R}$-valued fuzzy variables with the following joint distributions with B:

$$A_1 \oplus_B A_2 = \mathcal{F}_0((+) \times \mathbf{1}_{\mathbb{I}})(A_1 \otimes_B A_2), \qquad A_1 \odot_B A_2 = \mathcal{F}_0((\cdot) \times \mathbf{1}_{\mathbb{I}})(A_1 \otimes_B A_2),$$

where $(+) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are respectively the addition and the multiplication of real numbers.

Theorem 1. *The operations*

$$\oplus_{\ldots}, \odot_{\ldots} : \{(C_1,C_2) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R} \times X) \times \mathcal{F}_0(\mathbb{R} \times X) \mid \mathcal{F}(\mathrm{pr}_2)(C_1) = \mathcal{F}(\mathrm{pr}_2)(C_2)\} \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R} \times X)$$

are continuous, associative, and commutative.

We call the defined operations the *conditional addition* and the *conditional multiplication* of weakly bounded fuzzy numbers considering their joint distributions with a third weakly bounded fuzzy variable.

Remark. *Obviously the conditional sum of fuzzy vectors, i.e., of $\mathbb{R}^n$-valued fuzzy variables, can be defined analogously. Subtraction is obtained as addition of A_1 and $(-1) \cdot A_2$. To construct division, it is necessary to restrict ourselves to the divisors with zero possibility of the value* 0.

3 Concluding remarks

The obtained conditional generalizations of the operations of fuzzy arithmetic can improve efficiency of fuzzy models, e.g., in network planning, fuzzy optimization etc.

We should also note that, along with the simplest fuzzy conjunction $\wedge$, a wide spectrum of so called triangular norms (t-norms) is used for the construction of fuzzy arithmetic [3]. They can be more adequate for specific classes of problems. Such generalizations and their analysis will be the topic of a future publication.

References

[1] Anisimov D.V., Orlov V.B., Petrova V.A. *Fuzzy mathematics in economic models.* In: Smirnov G.V., Tamasian G.S. (Eds.), Proc. of 41 Intern. Sci. Conf. "Managing by processes and stability", 2010, St. Petersburg, 535–541.

[2] Bertoluzza C., Corral N., Salas A. *On a new class of distances between fuzzy numbers.* Mathware Soft. Comput. 1995, **2**, 71–84.

[3] Kolesárová A. *Triangular norm based addition of linear fuzzy number.* Tatra Mountains Math. Publ. 1995, **6**, 75–81.

[4] Zadeh L. *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, I.* Information Sciences 1975, **8**, 199–249.

Received 7.02.2013

Никифорчин Х.О. *Умовні операції над нечіткими числами* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 110–113.

Запропоновано оцінку спільного розподілу можливості для двох нечітких чисел, яка спирається на нечіткі відношення з третьою нечіткою величиною. Як наслідок, отримано операції умовного додавання і умовного множення взаємодіючих нечітких чисел, для яких відомі спільні розподіли можливості з нечіткою величиною.

Ключові слова і фрази: нечітка арифметика, розподіл можливості.

Никифорчин Х.О. *Условные операции над нечеткими числами* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 110–113.

Предложена оценка совместного распределения возможности для двух нечетких чисел, основанная на нечетких отношениях с третьей нечеткой величиной. Как следствие, получены операции условного сложения и условного умножения взаимодействующих нечетких чисел, для которых известны совместные распределения возможности с нечеткой величиной.

Ключевые слова и фразы: нечеткая арифметика, распределение возможности.

ISSN 2075-9827
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.98

PATRA M.I., SHARYN S.V.

OPERATOR CALCULUS ON THE CLASS OF SATO'S HYPERFUNCTIONS

Patra M.I., Sharyn S.V. *Operator calculus on the class of Sato's hyperfunctions*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 114–120.

We construct a functional calculus for generators of analytic semigroups of operators on a Banach space. The symbol class of the calculus consists of hyperfunctions with a compact support in $[0,\infty)$. Domain of constructed calculus is dense in the Banach space.

Key words and phrases: functional calculus, analytic semigroups of operators, hyperfunctions.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: patra-m@mail.ru (Patra M.I.), sharynsir@yahoo.com (Sharyn S.V.)

INTRODUCTION

Roughly speaking, the aim of functional calculus is to define an operator $f(A)$ for a function f belonging to some algebra of functions (so called symbol algebra) and for some (in general unbounded) operator A on a Banach space. In the same time we understand a functional calculus as an algebraic (or more generally topological) isomorphism from symbol algebra to algebra of operators.

There are many ways to define a functional calculus for different classes of operators on different symbol algebras. One of them (the Hille-Phillips calculus) was developed in [6] and generalized in [10, 2, 9, 8]. For new helpful applications of a Hille-Phillips type functional calculus see [1] and the references given there.

In this article we use the class of hyperfunctions, supported by a compact set in positive semiaxis, as a symbol algebra and construct an analogue of Hille-Phillips calculus for generators of analytic semigroups of operators on a Banach space.

The hyperfunctions were introduced by M.Sato in [11]. We can understand Sato's hyperfunctions as a generalization of the concept of boundary values of complex analytic functions and as an extension of ultradistributions with a compact support [7]. Theory of hyperfunctions is a very useful tool in the study of D-modules, holonomic systems of differential equations, and especially some aspects of symplectic geometry and harmonic analysis that are part of microlocal analysis, especially algebraic microlocalization.

1 PRELIMINARIES AND DENOTATIONS

Let $\mathscr{L}(X)$ denote the space of continuous linear operators over a locally convex space X and let X' be the dual of X. Throughout the paper, the spaces $\mathscr{L}(X)$ and X' will be endowed with the locally convex topology of uniform convergence on bounded subsets of X.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46F15, 47A60, 47D06.

Let $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ stand for the nonnegative semiaxis. A family $\{U(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ of bounded linear operators on a complex Banach space $(E, \|\cdot\|)$ is called a one-parameter semigroup if $U(\cdot)$ is a mapping $U(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathscr{L}(E)$ such that $U(t+s) = U(t)U(s)$ and $U(0) = I$ is the unit operator. The operator

$$Ax := \lim_{t\to+0} \frac{U(t)x - x}{t}, \qquad x \in \mathfrak{D}(A),$$

where $\mathfrak{D}(A)$ consists of all $x \in E$ for which the previous limit exists, is called a generator of the semigroup $\{U(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$. To emphasize that an operator A generates a semigroup, we will use the standard notation $\{e^{tA} : t \in \mathbb{R}_+\}$ or $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ instead of $\{U(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$.

The semigroup $\{e^{tA} : t \in \mathbb{R}_+\}$ is a C_0-semigroup iff $\lim_{t\to+0} \|e^{tA}x - x\| = 0$ for all $x \in E$. If $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ is a C_0-semigroup then the following properties hold (see [3]):

- if $x \in \mathfrak{D}(A)$ then $e^{tA}x \in \mathfrak{D}(A)$ and $Ae^{tA}x = e^{tA}Ax$,
- $e^{tA}x \in \mathfrak{D}(A)$ for all $x \in E$, $t \in \mathbb{R}_+$ and $\mathfrak{D}(A)$ is dense in E.

Let Σ_θ be an open sector in $\mathbb{C}$, defined as

$$\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta\}\backslash\{0\}.$$

It is obvious that closure of a sector Σ_θ is defined as $\Sigma_\theta^{\mathrm{cl}} := \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \le \theta\}$.

We say that a bounded C_0-semigroup $\{U(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ on a Banach space E is a bounded analytic semigroup (see [5, 12]), if there exists $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$ such that

- $U(t)$ is a restriction onto $\mathbb{R}_+$ of an analytic family of operators $U(z)$ in open sector Σ_θ;
- $U(s+z) = U(s) \circ U(z)$ for all $s, z \in \Sigma_\theta^{\mathrm{cl}}$;
- for each $\vartheta < \theta$ the family $\{U(z)\}$ is uniformly bounded in $\Sigma_\vartheta^{\mathrm{cl}}$ and $U(z)x \to x$ as $z \to 0$ in $\Sigma_\vartheta^{\mathrm{cl}}$ for each $x \in E$.

Let $H(W)$ denote a vector space of all holomorphic functions on an open set $W \subset \mathbb{C}$. We follow [4] in defining the space of functions

$$H := \lim_K \operatorname{ind}(\lim_k \operatorname{pr} H_{K,k}),$$

where

$$H_{K,k} := \Big\{F \in H(\Omega_K) : \|F\|_{K,k} := \sup_{z\in\Omega_K} |F(z)|e^{k\mathrm{Re}z} < \infty\Big\},$$

and

$$\Omega_K := \Big\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}z| < \frac{\mathrm{Re}z}{K} + \frac{1}{K^2}\Big\}. \tag{1}$$

In other words, H is the space of functions F, which are holomorphic in a some angular neighborhood Ω_K of $[0,\infty)$ with finite norms $\|F\|_{K,k}$ for each k.

Here and subsequently, $\mathcal{A}(\Omega)$ denotes the space of real-analytic functions in an open set $\Omega \in \mathbb{R}$. Let $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ denote the space of germs of real-analytic functions on neighborhoods of the semiaxis $[0,\infty)$. A restriction of any element of $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ is uniquely defined function on $\mathbb{R}_+$. In the sequel we will treat $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ as the space of such restrictions.

It is clear, that restrictions of functions from H onto $[0,\infty)$ form a subset in $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$, which we will denote by the symbol H_+. Since $\mathbb{R}_+ \subset \Omega_K$, for any bounded function $f(z)$ the inequality $\sup_{z\in\mathbb{R}_+}|f(z)| \leq \sup_{z\in\Omega_K}|f(z)|$ holds. Therefore, $\varphi \in H_+$ iff it is a real-analytic function on $\mathbb{R}_+$ satisfying the condition
$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|\varphi(t)|e^{kt} < \infty$$
for each k and it can be continued in an angle Ω_K for some K.

Let Ω be an open set in $\mathbb{R}$ and V be an open set in $\mathbb{C}$ containing Ω as a relatively closed set. The vector space of all hyperfunctions on Ω is defined (see [7, 11]) to be the quotient space
$$\mathcal{B}(\Omega) = H(V\setminus\Omega)/H(V),$$
where $H(V)$ denotes the restriction of $H(V)$ to $V\setminus\Omega$. The hyperfunction represented by an $F \in H(V\setminus\Omega)$ is denoted as follows
$$f = [F] = F(t+i0) - F(t-i0) \quad \text{or} \quad f(t) = [F(z)]_{z=t}.$$
The representative F is called a defining function of the hyperfunction f.

The set of all hyperfunctions with a support in a fixed compact set $K \subset \Omega$ is represented as $\mathcal{B}_K(\Omega) = H(V\setminus K)/H(V)$. Let $\mathcal{B}_c(\Omega)$ denote the space of hyperfunctions with a compact support in Ω.

The following statement from [7] will be used in the sequel.

Theorem 1. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}$ be an open set. Then we have the isomorphism of vector spaces $\mathcal{B}_c(\Omega) \cong \mathcal{A}(\Omega)'$. For a $\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$ and an $f = [F] \in \mathcal{B}_c(\Omega)$ with $F \in H(V\setminus \operatorname{supp} f)$, the canonical bilinear functional is given by*
$$\langle f,\varphi\rangle = -\oint_\Gamma F(z)\boldsymbol{\varphi}(z)dz, \tag{2}$$
where Γ is a closed path in the intersection of the domain of the analytic continuation $\boldsymbol{\varphi}$ of a function φ and the domain of F, and surrounding $\operatorname{supp} f$ once in the positive orientation.

2 Cross-correlation

Let us denote by $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ the space of all hyperfunctions with a compact support in the semiaxis $[0,\infty)$. For any $f=[F]$ and $g=[G]$ from $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ we define the convolution $f*g$ by $f*g=[H]$, where
$$H(z) = -\oint_\Gamma F(w)G(z-w)dw,$$
and Γ is a closed path in the intersection of the domains of analytic functions $w \longmapsto F(w)$ and $w \longmapsto G(z-w)$. It is known [7], that the space $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ is an algebra with respect to the convolution with Dirac delta-function $\delta(x)$ as an unit element.

The cross-correlation of a hyperfunction $f=[F]\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ and a real-analytic function $\varphi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ is defined to be
$$(f\star\varphi)(t) := -\oint_\Gamma F(z)\boldsymbol{\varphi}(z+t)dz, \qquad t\in\mathbb{R}_+,$$
where Γ is a closed path in the intersection of a domain of the analytic function $z\longmapsto F(z)$ and a domain of $z\longmapsto\boldsymbol{\varphi}(z+t)$ (here $\boldsymbol{\varphi}$ is the analytic continuation of φ), and surrounding $\operatorname{supp} f$ once in the positive orientation. The correctness of the definition follows from Theorem 1.

Theorem 2. *For a hyperfunction $f=[F]\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ and a function $\varphi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ the cross-correlation $f\star\varphi$ is a real-analytic function, belonging to $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$.*

Proof. According to Pringsheim's theorem [7, Theorem 2.1], an infinitely differentiable function φ belongs to $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ iff for each compact set $K\subset\mathbb{R}_+$ there exist constants $h>0$ and $C>0$ such that inequality
$$\sup_{x\in K}|\varphi^{(n)}(x)| \leq Ch^n n!$$
holds for any $n\in\mathbb{Z}_+$.

Let $K\subset\mathbb{R}_+$ be a compact set. The following inequalities hold
$$\begin{aligned}\sup_{t\in K}|(f\star\varphi)^{(n)}(t)| &= \sup_{t\in K}\left|-\oint_\Gamma F(z)\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(z+t)dz\right| \leq \sup_{t\in K}\oint_\Gamma |F(z)|\cdot|\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(z+t)|\,dz\\ &\leq \sup_{t\in K}\sup_{z\in\Gamma}|\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(z+t)|\oint_\Gamma|F(z)|\,dz \leq \sup_{t\in K}\sup_{z\in\Gamma}|\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(z+t)|\sup_{z\in\Gamma}|F(z)|\mu(\Gamma),\end{aligned} \tag{3}$$
where $\mu(\Gamma)$ denotes the length of Γ. Note, that $\sup_{z\in\Gamma}|F(z)|\mu(\Gamma)<\infty$.

Via the maximum-modulus principle in complex analysis there exists a point $z_0\in\Gamma$, such that $\sup_{t\in K}\sup_{z\in\Gamma}|\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(z+t)| = \sup_{t\in K}|\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(z_0+t)|$. The function $\mathbb{R}\ni t\longmapsto|\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(z_0+t)|$ is a restriction of the analytic function $\mathbb{C}\ni z\longmapsto|\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(z_0+z)|$, therefore $|\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(z_0+t)|$ is a real-analytic function. So, by Pringsheim's theorem there exist constants $h>0$ and $C>0$ such that $\sup_{t\in K}|\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(z_0+t)|\leq Ch^n n!$.

Finally, we can continue the inequality (3) as follows
$$\sup_{t\in K}|(f\star\varphi)^{(n)}(t)| \leq \mu(\Gamma)\sup_{z\in\Gamma}|F(z)|Ch^n n! = C_1 h^n n!,$$
where $C_1 := \mu(\Gamma)\sup_{z\in\Gamma}|F(z)|C$, which proves that $(f\star\varphi)(t)\in\mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$. □

The following statement may be considered as an improvement of Theorem 2.

Theorem 3. *For a hyperfunction $f=[F]\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ and a function $\varphi\in H_+$ the cross-correlation $f\star\varphi$ belongs to H_+.*

Proof. Note, that function $t\longmapsto(f\star\varphi)(t)$ can be continued to the analytic one
$$\Omega_K\ni s\longmapsto(f\star\varphi)(s) := -\oint_\Gamma F(z)\boldsymbol{\varphi}(z+s)dz,$$
for some K, since $\boldsymbol{\varphi}\in H$.

Since bilinear form (2) does not depend on choice of the path Γ, we assume, that a domain (1) always contain the path. Then for each k we have
$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|(f\star\varphi)(t)|\,e^{kt} &= \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left|-\oint_\Gamma F(z)\boldsymbol{\varphi}(z+t)\,dz\right|e^{kt} \leq \sup_{s\in\Omega_K}\left|-\oint_\Gamma F(z)\boldsymbol{\varphi}(z+s)e^{ks}\,dz\right|\\ &= \sup_{s\in\Omega_K}\left|-\oint_\Gamma F(z)\boldsymbol{\varphi}(z+s)e^{k(s+z)}e^{-kz}\,dz\right| \leq \sup_{s\in\Omega_K}\oint_\Gamma|F(z)||\boldsymbol{\varphi}(z+s)|e^{k\mathrm{Re}(s+z)}e^{-k\mathrm{Re}z}\,dz\\ &\leq \sup_{z\in\Gamma}\sup_{s\in\Omega_K}|\boldsymbol{\varphi}(z+s)|e^{k\mathrm{Re}(s+z)}\oint_\Gamma|F(z)|e^{-k\mathrm{Re}z}\,dz.\end{aligned} \tag{4}$$

In the case $0 \notin \operatorname{supp} f$ it is possible to choose the curve Γ such that $\Gamma \subset V_K$, where $V_K := \left\{ z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im} z| < \frac{\mathrm{Re} z}{K} \right\}$. Note, that inequalities

$$|\mathrm{Im}(s+z)| = |\mathrm{Im} s + \mathrm{Im} z| \leq |\mathrm{Im} s| + |\mathrm{Im} z| < \frac{\mathrm{Re} s}{K} + \frac{1}{K^2} + \frac{\mathrm{Re} z}{K} = \frac{\mathrm{Re}(s+z)}{K} + \frac{1}{K^2}$$

imply $r = s + z \in \Omega_K$ for any $s \in \Omega_K$ and $z \in V_K$. Since $\varphi \in H$, the inequality (4) can be continued as follows

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |(f \star \varphi)(t)| e^{kt} &\leq \sup_{z \in \Gamma} \sup_{s \in \Omega_K} |\varphi(z+s)| e^{k\mathrm{Re}(s+z)} \oint_\Gamma |F(z)| e^{-k\mathrm{Re} z} dz \\ &= \sup_{r \in \Omega_K} |\varphi(r)| e^{k\mathrm{Re} r} \oint_\Gamma |F(z)| e^{-k\mathrm{Re} z} dz < \infty. \end{aligned}$$

Consider the case $0 \in \operatorname{supp} f$. Let us use Ω_{2K} instead of Ω_K in the estimation (4). Then we obtain

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |(f \star \varphi)(t)| e^{kt} \leq \sup_{z \in \Gamma} \sup_{s \in \Omega_{2K}} |\varphi(z+s)| e^{k\mathrm{Re}(s+z)} \oint_\Gamma |F(z)| e^{-k\mathrm{Re} z} dz. \tag{5}$$

Inequalities

$$|\mathrm{Im}(s+z)| = |\mathrm{Im} s + \mathrm{Im} z| \leq |\mathrm{Im} s| + |\mathrm{Im} z| < \frac{\mathrm{Re} s}{2K} + \frac{1}{4K^2} + \frac{\mathrm{Re} z}{2K} + \frac{1}{4K^2} < \frac{\mathrm{Re}(s+z)}{K} + \frac{1}{K^2}$$

imply $r = z + s \in \Omega_K$ for any $z \in \Omega_{2K}$ and $s \in \Omega_{2K}$. Since $\Gamma \subset \Omega_{2K}$ and $\varphi \in H$, the inequality (5) can be continued as follows

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |(f \star \varphi)(t)| e^{kt} &\leq \sup_{z \in \Gamma} \sup_{s \in \Omega_{2K}} |\varphi(z+s)| e^{k\mathrm{Re}(s+z)} \oint_\Gamma |F(z)| e^{-k\mathrm{Re} z} dz \\ &= \sup_{r \in \Omega_K} |\varphi(r)| e^{k\mathrm{Re} r} \oint_\Gamma |F(z)| e^{-k\mathrm{Re} z} dz < \infty. \end{aligned}$$

Hence, $f \star \varphi \in H_+$. □

3 Operator calculus

Let A be a generator of an analytic semigroup $\{e^{tA}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Let $D_+(A)$ be a subspace in the Banach space E, defined by

$$D_+(A) := \left\{ \widehat{x}_{(A)} : \widehat{x}_{(A)} := \int_0^{+\infty} e^{tA} x \varphi(t) dt, \quad x \in E, \varphi \in H_+ \right\}.$$

Note, that we understand the above integral in the Bochner sense [6].

Theorem 4. *The subspace $D_+(A)$ is dense in E.*

Proof. Suppose that $D_+(A)$ is not dense in E. Then by Hahn-Banach's theorem there is nonzero functional $x' \in E'$ such that $\langle x', \widehat{x}_{(A)} \rangle = 0$ for all $x \in \mathfrak{D}(A^\infty)$, where $\mathfrak{D}(A^\infty) := \bigcap_{\alpha \in \mathbb{Z}_+} \mathfrak{D}(A^\alpha)$, and $\mathfrak{D}(A^\alpha)$ is the domain of operator A^α.

From the Bochner's integral properties [6, 3.7] it follows that

$$\langle x', \widehat{x}_{(A)} \rangle = \int_0^{+\infty} \langle x', e^{tA} x \rangle \varphi(t) dt = 0.$$

Since A is a generator of a C_0-semigroup, $\mathfrak{D}(A^\infty)$ is dense in E (see [5]). It follows that for any $x \in \mathfrak{D}(A^\infty)$ the real-analytic function $t \longmapsto \langle x', e^{tA} x \rangle$ must vanish identically on $[0, +\infty)$ since otherwise it would have been possible to choose $\varphi \in H_+$ such that $\langle x', \widehat{x}_{(A)} \rangle$ does not vanish. Thus in particular for $t = 0$ we obtain that equality $\langle x', x \rangle = 0$ holds for every $x \in \mathfrak{D}(A^\infty)$. Therefore $x' = 0$ which contradicts the choice of x'. □

For each hyperfunction $f = [F] \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}_+)$ the operator $f(A)$ is given by

$$f(A) : D_+(A) \ni \widehat{x}_{(A)} \longmapsto f(A)\widehat{x}_{(A)} = \int_0^{+\infty} e^{tA} x (f \star \varphi)(t) dt \in D_+(A).$$

The mapping $\Phi_A : B_c(\mathbb{R}_+) \ni f \longmapsto f(A) \in \mathscr{L}(D_+(A))$ is called the operator calculus for generators of analytic semigroups of operators on the class of Sato's hyperfunctions with a compact support in $\mathbb{R}_+$.

Theorem 5. *For each $\varphi \in H_+$ the mapping Φ_A produces an algebraic homomorphism from the convolution algebra $B_c(\mathbb{R}_+)$ into the algebra of linear continuous operators over $D_+(A)$.*

Proof. Let $f, g \in B_c(\mathbb{R}_+)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. The linearity $\Phi_A(\alpha f + \beta g) = \alpha \Phi_A(f) + \beta \Phi_A(g)$ of the mapping Φ_A is clear via the linearity of the integral.

Let us show that $\Phi_A(f * g) = \Phi_A(f) \circ \Phi_A(g)$. Let F and G be defining functions of the hyperfunctions f and g respectively. Using the method of variable changing, for an arbitrary $\widehat{x}_{(A)} \in D_+(A)$ we obtain

$$\begin{aligned} (f * g)(A)\widehat{x}_{(A)} &= \int_0^{+\infty} e^{tA} x((f * g) \star \varphi)(t)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{tA} x\Big(-\oint_{\Gamma_1} \Big(-\oint_{\Gamma_2} F(w) G(z-w)\, dw \Big) \varphi(z+t)\, dz \Big)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{tA} x\Big(-\oint_{\Gamma_2} F(w) \Big(-\oint_{\Gamma_1} G(z-w) \varphi(z+t)\, dz \Big)\, dw \Big)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{tA} x\Big(-\oint_{\Gamma_2} F(w) \Big(-\oint_{\Gamma_3} G(z) \varphi(z+w+t)\, dz \Big)\, dw \Big)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{tA} x(f \star (g \star \varphi))(t)\, dt = f(A) \int_0^{+\infty} e^{tA} x (g \star \varphi)(t) dt = f(A) g(A) \widehat{x}_{(A)}, \end{aligned}$$

where Γ_1, Γ_2 are suitable curves and Γ_3 is a linear shift of the Γ_1.

For Dirac delta-function $\delta(x)$ we have

$$\delta(A)\widehat{x}_{(A)} = \int_0^{+\infty} e^{tA} x (\delta \star \varphi)(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{tA} x \varphi(t) dt = \widehat{x}_{(A)}.$$

So, $\delta(A)$ is an unit operator on $D_+(A)$. □

REFERENCES

[1] Baeumer B., Haase M., Kovács M. *Unbounded functional calculus for bounded groups with applications.* J. Evol. Eqv. 2009, **9** (1), 171–195. doi:10.1007/s00028-009-0012-z

[2] Balakrishnan A.V. *An operational calculus for infinitesimal operators of semigroups.* Trans. Amer. Math. Soc. 1960, **91**, 330–353. doi: 10.1090/S0002-9947-1959-0107179-0

[3] Butzer P.L., Berens H. Semi-groups of operators and approximation. Springer, London, 2012.

[4] Domanski P., Langenbruch M. *On the Laplace Transform for Vector Valued Hyperfunctions.* Functiones et Approximatio 2010, **43** (2), 129–159. doi:10.7169/facm/1291903394

[5] Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Graduate Text in Mathematics, **194**. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[6] Hille E., Phillips R. Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc., Coll. Publ., **31**, Providence R.I., 2000.

[7] Komatsu H. An Introduction to the Theory of Generalized Functions. University Publ., Tokyo, 2000.

[8] Lopushansky O.V., Sharyn S.V. *Functional calculus for generators of analytic semigroups of operators.* Carpath. Math. Publ. 2012, **4** (1), 83–89. (in Ukrainian)

[9] Lopushansky O.V., Sharyn S.V. *Operator calculus for convolution algebra of Schwartz distributions on semiaxis.* Mat. Stud. 1997, **7** (1), 61–72.

[10] Nelson E.A. *Functional Calculus Using Singular Laplace Integrals.* Trans. Amer. Math. Soc. 1958, **88**, 400–413. doi: 10.1090/S0002-9947-1958-0096136-8

[11] Sato M. *Theory of hyperfunctions. I, II.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 1959/60, **8**, 139–193, 387–436.

[12] Vrabie I.I. C_0-semigroups and Applications. Mathematics Studies, **191**. North-Holland, Amsterdam, 2003.

Received 15.01.2013

Патра М.І., Шарин С.В. *Функціональне числення в класі гіперфункцій Сато* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — C. 114–120.

Ми будуємо функціональне числення для генераторів аналітичних напівгруп операторів на банаховому просторі. Клас символів такого числення складається з гіперфункцій з компактними носіями в $[0,\infty)$. Область визначення побудованого числення є щільною в банаховому просторі.

Ключові слова і фрази: функціональне числення, аналітичні напівгрупи операторів, гіперфункції.

Патра М.И., Шарин С.В. *Функциональное исчисление в классе гиперфункций Сато* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — C. 114–120.

Ми строим функциональное исчисление для генераторов аналитических полугрупп операторов, действующих в банаховом пространстве. Класс символов такого исчисления состоит из гиперфункций с компактными носителями в $[0,\infty)$. Область определения построенного исчисления плотна в банаховом пространстве.

Ключевые слова и фразы: функциональное исчисление, аналитические полугруппы операторов, гиперфункции.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.9(076)

СОБКОВИЧ Р.І., КАЗМЕРЧУК А.І.

ПОБУДОВА ФУНКЦІЇ ҐРІНА В ЗАДАЧІ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Собкович Р.І., Казмерчук А.І. *Побудова функції Ґріна в задачі Валле-Пуссена для нелінійних систем диференціальних рівнянь* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — C. 121–128.

У випадку багатоточкової крайової задачі Валле-Пуссена для нелінійних систем диференціальних рівнянь доведено теореми існування та єдиності розв'язків. Запропоновано ітераційні схеми для їх відшукання.

Ключові слова і фрази: система диференціальних рівнянь, функція Ґріна.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

E-mail: _kaz@rambler.ru (Казмерчук А.І.)

У даній статті ми знову повертаємося до відомої задачі Валле-Пуссена: знайти розв'язки звичайного лінійного або нелінійного диференціального рівняння n-го порядку із відомими значеннями шуканого розв'язку в n заданих точках. Очевидна фізична інтерпретація даної задачі: знаючи стан деякого процесу в t_i $(i = 1,2,\dots,n)$ моменти часу, визначити його стан у довільний момент часу t. При цьому фізичний процес описується математичною моделлю у вигляді деякого диференціального рівняння. У такій постановці дана проблема вперше була сформульована та частково розв'язана Валле Пуссеном у 1929 році [1].

Зараз основними проблемами залишаються встановлення умов існування та єдиності розв'язків поставленої задачі і знаходження ефективних способів їх побудови. На відміну від різних методів дослідження задачі, розглянутих авторами ряду статей (див., наприклад, [1, 2, 3]), ми пропонуємо інший підхід, який ґрунтується на відшуканні розв'язків системи (1) на множині функцій, що задовольняють умови (2). Це дозволило сформулювати та довести нові теореми існування та єдиності, а також обґрунтувати існування ширшого, ніж наведено у вказаних вище роботах, класу функцій, для яких досліджувана задача має розв'язок. Пропонований нами алгоритм одночасно дає можливість знаходити такі розв'язки.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$x^{(n)} = f(t,x,x',\dots,x^{(n-1)}), \tag{1}$$

де $x = (x_1,x_2,\dots,x_m)^T$, $f = (f_1,f_2,\dots,f_m)^T$ — вектори m-вимірного евклідового простору E^m, та поставимо задачу відшукання її розв'язків, що задовольняють умови

$$x(t_i) = x_i, \qquad i = 1,2,\dots,n; \;\; 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = h. \tag{2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34A34.

Зауважимо, що умови (2), не обмежуючи загальності, можна вважати заданими у вигляді

$$x(t_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \;\; 0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = h,$$

оскільки цього можна досягти за допомогою заміни шуканої функції у вигляді інтерполяційного полінома Лагранжа

$$x(t) = y(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \cdot x_i, \qquad P_i(t) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (t - t_j).$$

Нехай функція $f(t, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ визначена та неперервна в області

$$D = [0; h] \times I_0 \times I_1 \times \cdots \times I_{n-1}, \qquad I_s = [a_s, b_s], \;\; s = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Означення. *n раз диференційовну на відрізку $[0; h]$ функцію $x_*(t)$ називатимемо розв'язком задачі (1), (2), якщо $x_*^{(s)}(t) \in I_s$, $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, і тотожно задовольняється рівність $x_*^{(n)}(t) = f(t, x_*(t), x_*'(t), \ldots, x_*^{(n-1)}(t))$, а також виконуються умови $x_*(t_i) = x_i$.*

Побудуємо інтегральний оператор $L\left[f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})\right]$ так, щоб рівняння

$$x = L[f] \tag{3}$$

та задача (1), (2) були еквівалентними. Еквівалентність задач ми розуміємо в тому сенсі, що функція $x_*(t)$, будучи розв'язком інтегрального рівняння $x = L[f]$, повинна також бути розв'язком задачі (1), (2). І навпаки: кожен розв'язок задачі (1), (2) повинен задовольняти рівняння $x = L[f]$.

Користуючись методикою, запропонованою нами в [4], отримуємо

$$L[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \left(\int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s)) ds + x_i \right).$$

Серед властивостей многочленів, використаних при побудові оператора L, виділимо такі:

$$\frac{P_i(t_j)}{P_i(t_i)} = \begin{cases} 0, \; j \neq i, \\ 1, \; j = i \end{cases}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} = 1, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^{(s)}(t) \cdot (t_i - t)^{n-1}}{P_i(t_i)} = 0, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, n-2, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^{(n-1)}(t) \cdot (t_i - t)^{n-1}}{P_i(t_i)} = (n-1)!\,. \tag{7}$$

Рівність (4) перевіряється безпосередньо. Доведення тотожності (5) очевидне, оскільки многочлен $n-1$ степеня у лівій частині рівності в n точках t_i приймає однакові значення 1.

Доведення двох наступних тотожностей (6) та (7) ґрунтується на співвідношеннях

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^s}{P_i(t_i)} = \begin{cases} 0, \; s = 0, 1, 2, \ldots, n-2, \\ 1, \; s = n-1, \end{cases} \tag{8}$$

які випливають з наступних міркувань. Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_1^{n-1} x_1 + t_2^{n-1} x_2 + \cdots + t_n^{n-1} x_n = 1 \end{cases}$$

з невідомими x_i. Обчисливши її головний визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$ та мінори $\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \\ t_1 & \ldots & 0 & \ldots & t_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{n-1} & \ldots & 1 & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$, які є визначниками Вандермонда, отримуємо

$$\Delta = \prod_{1 \le j < i \le n} (t_i - t_j), \qquad \Delta_k = (-1)^{n+k} \prod_{\substack{1 \le j < i \le n \\ i, j \neq k}} (t_i - t_j).$$

Тому $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta} = \dfrac{(-1)^{n+k}}{(t_k - t_1)(t_k - t_2)\ldots(t_k - t_{k-1})(t_{k+1} - t_k)\ldots(t_n - t_k)} = \dfrac{1}{P_k(t_k)}$.

Обґрунтуємо еквівалентність задачі (1), (2) та задачі відшукання розв'язків рівняння $x = L[f]$. Насамперед зауважимо, що побудований нами оператор L довільну неперервну на відрізку $[0; h]$ функцію $g(t)$ відображає у n раз диференційовну на цьому проміжку функцію $p(t) = L[g(t)]$, що задовольняє умови $p(t_i) = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Це випливає з (4). Тому довільний розв'язок $x_*(t)$ рівняння (3) задовольняє умови (2). Продиференціювавши тотожність $x_* = L\left[f\left(t, x_*, x_*', \ldots, x_*^{(n-1)}\right)\right]$ та використавши співвідношення (6), дістаємо

$$x_*' = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'(t)}{P_i(t_i)} \cdot \left(\int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, \ldots) ds + x_i \right) + f(t, x_*, \ldots, x_*^{(n-1)}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \cdot \frac{(t_i - t)^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'(t)}{P_i(t_i)} \cdot \left(\int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, \ldots) ds + x_i \right).$$

Продовжуючи процес диференціювання та спрощуючи отримані вирази за допомогою тотожностей (6), на n-тому кроці отримаємо рівність

$$x_*^{(n)} = f(t, x_*, \ldots, x_*^{(n-1)}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^{(n-1)}(t)}{P_i(t_i)} \cdot \frac{(t_i - t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

або, враховуючи (7), $x_*^{(n)} = f(t, x_*, \ldots, x_*^{(n-1)})$.

Те, що кожен розв'язок задачі (1), (2) є розв'язком рівняння $x = L[f]$ випливає з представлення рівняння (1) у вигляді

$$x(t) = L[0] + \int_0^t\int_0^t \dots \int_0^t f\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)\right) dt\, dt \dots dt,$$

$$x(t) = L[0] + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_0^t (t-s)^{(n-1)} \cdot f\left(s, x(s), x'(s), \dots, x^{(n-1)}(s)\right) ds, \qquad (9)$$

та врахування рівностей $\frac{1}{(n-1)!} \int_{t_i}^{t_i+1} (t_i - s)^{(n-1)} \cdot f\left(s, x(s), x'(s), \dots, x^{(n-1)}(s)\right) ds = x_{i+1} - x$, які випливають з (9) та умов (2).

Зауважимо, що, побудувавши для правої частини (9) інтерполяційний поліном Лагранжа із значеннями x_i в точках t_i, отримаємо многочлен

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \left(\int_0^{t_i} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f\left(s, x(s), x'(s), \dots, x^{(n-1)}(s)\right) ds + x_i \right),$$

який співпадає з інтерполяційним поліномом Лагранжа для виразу

$$L[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \left(\int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f\left(s, x(s), x'(s), \dots, x^{(n-1)}(s)\right) ds + x_i \right).$$

Введемо у розгляд функцію $K(t,s)$, визначену в квадраті $[0;h] \times [0;h]$, а в тому числі і у кожній із $2n-2$ областей s_{ij}, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 1, 2$, на які розбивають цей квадрат $n-1$ прямих $s = t_i$ та пряма $t = s$ (вказані області зображені на рисунку). Визначимо її за допомогою співвідношень

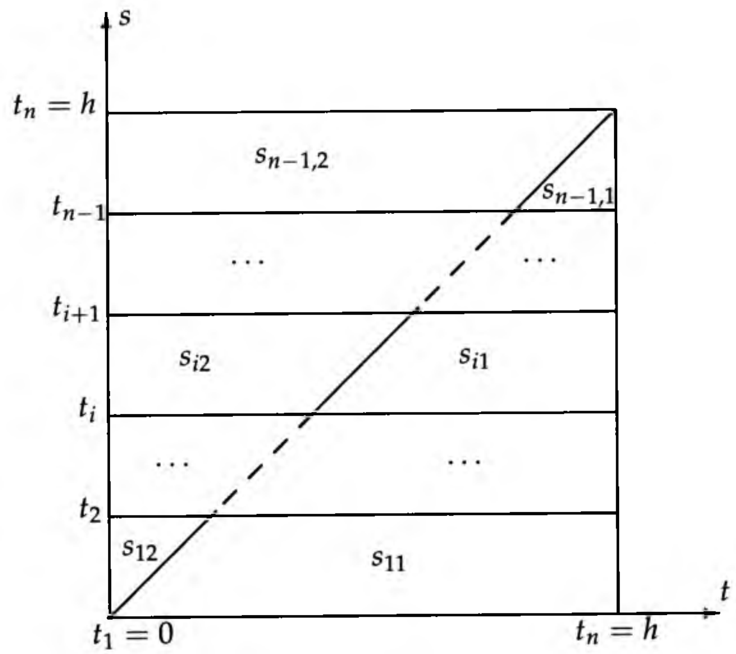
$$K(t,s) = \begin{cases} \frac{P_1(t)}{P_1(t_1)} \cdot \frac{(t_1-s)^{n-1}}{(n-1)!};\ t_1 \le s \le t_2,\ s \le t \le t_n; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{P_1(t)}{P_1(t_1)} \cdot (t_1 - s)^{n-1} + \dots + \frac{P_k(t)}{P_k(t_k)} \cdot (t_k - s)^{n-1} \right); t_k \le s \le t_{k+1}, s \le t \le t_n; \\ -\frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{P_2(t)}{P_2(t_2)} \cdot (t_2 - s)^{n-1} + \dots + \frac{P_n(t)}{P_n(t_n)} \cdot (t_n - s)^{n-1} \right);\ t_1 \le t \le t_2,\ s \ge t; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{P_{k+1}(t)}{P_{k+1}(t_{k+1})} \cdot (t_{k+1} - s)^{n-1} + \frac{P_n(t)}{P_n(t_n)} \cdot (t_n - s)^{n-1} \right); t_k \le t \le t_{k+1}, s \ge t; \end{cases}$$

Відмітимо наступні властивості введеної функції.

1) Функція $K(t,s)$, як функція від змінної t, при довільному $s \in [0,h]$ задовольняє рівняння $x^{(n)}(t) = 0$. Даний факт очевидний, оскільки по змінній t функція $K(t,s)$ є многочленом степеня $n-1$.

2) Функція $K(t,s)$ неперервна в квадраті $[0,h] \times [0,h]$. Справді, розриви можливі вздовж прямих $s = t_i$ та вздовж прямої $s = t$. Але, як легко перевірити, значення функції $K(t,s)$ у сусідніх з цими прямими областях s_{ij} рівні.

3) Вздовж прямих $t = t_i$, $i = 1, \dots, n-1$, значення функції $K(t,s)$ дорівнюють 0. Дане твердження випливає із співвідношень (4).



4) Похідна $\frac{\partial^{(n-1)} K(t,s)}{\partial t^{(n-1)}}$ вздовж прямої $t = s$ має розрив величиною 1, тобто

$$\frac{\partial^{(n-1)} K(s+0,s)}{\partial t^{n-1}} - \frac{\partial^{(n-1)} K(s-0,s)}{\partial t^{n-1}} = 1.$$

Доведення цієї властивості реалізується безпосередніми обчисленнями. Зокрема для суміжних областей s_{k1} та s_{k2} маємо

$$\frac{\partial^{(n-1)} K(s+0,s)}{\partial t^{n-1}} - \frac{\partial^{(n-1)} K(s-0,s)}{\partial t^{n-1}} = \frac{(t_1 - s)^{n-1}}{P_1(t_1)} + \dots + \frac{(t_k - s)^{n-1}}{P_k(t_k)}$$
$$- \left(-\frac{(t_{k+1} - s)^{n-1}}{P_{k+1}(t_{k+1})} - \dots - \frac{(t_n - s)^{n-1}}{P_n(t_n)} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{P_i(t_i)}.$$

Отриманий вираз відповідно до співвідношень (8) дорівнює 1.

Введену нами функцію $K(t,s)$ в силу властивостей 1)–4), характерних для функцій Ґріна крайових задач, назвемо функцією Ґріна задачі (1), (2).

Тепер, використовуючи функцію $K(t,s)$, задачу (1), (2) можна записати у вигляді інтегро-диференціального рівняння

$$x(t) = L[0] + \int_0^h K(t,s) \cdot f\left(s, x(s), \dots, x^{(n-1)}(s)\right) ds. \qquad (10)$$

Зупинимося на теоремах існування та єдиності розв'язків поставленої нами задачі або рівняння (10).

У просторі векторів $u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \in E^{mn}$ введемо в розгляд оператор A, означивши його рівністю

$$A(u)=\begin{cases} L[0]+\int\limits_0^h K(t,s)\cdot f(s,u_0(s),u_1(s),\ldots,u_n(s))\,ds\\ L'[0]+\int\limits_0^h \frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\cdot f(s,u_0(s),u_1(s),\ldots,u_n(s))\,ds\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L^{(n-1)}[0]+\int\limits_0^h \frac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial t^{n-1}}\cdot f(s,u_0(s),u_1(s),\ldots,u_n(s))\,ds \end{cases},$$

де $u_0(t)=x(t),\ldots,u_{n-1}(t)=x^{(n-1)}(t)$. Із неперервності функції $f(t,y_0,\ldots,y_{n-1})$ випливає існування такої векторної константи M, що для всіх точок області D виконується

$$|f(t,y_0,y_1,\ldots,y_{n-1})|\le M \tag{11}$$

(тут і далі нерівності між векторами та матрицями розуміємо покомпонентно). Крім цього будемо вважати, що для всіх точок квадрата $[0,h]\times[0,h]$ виконуються нерівності $\left|\frac{\partial^i K(t,s)}{\partial t^i}\right|\le k_i$, $i=0,1,\ldots,n-1$.

Нехай S — множина векторів $u\in E^{mn}$, компоненти яких задовольняють такі умови $a_s+k_sM+p_s\le u_s\le b_s-k_sM-p_s$, $s=0,1,\ldots,n-1$, де $p_s=\left|p^{(s)}(t,x_1,\ldots,x_n)\right|_c$, $p(t,x_1,\ldots,x_n)=L[0]$ $(|\cdot|_c=\max_{t\in[0;h]}|\cdot|)$, а також нехай $\tilde u\in S$. Оскільки виконуються співвідношення

$$\begin{pmatrix} a_0+k_0M+p_0\\ a_1+k_1M+p_1\\ \ldots\\ a_{n-1}+k_{n-1}M+p_{n-1}\end{pmatrix}\le A(\tilde u)\le\begin{pmatrix} b_0-k_0M-p_0\\ b_1-k_1M-p_1\\ \ldots\\ b_{n-1}-k_{n-1}M-p_{n-1}\end{pmatrix},$$

то можна стверджувати, що $A\tilde u\in S$. Тому оператор A переводить множину S в себе і, будучи цілком неперервним (останнє випливає з неперервності функції f), має в S хоча б одну нерухому точку. Відповідно задача (1), (2) при цьому теж має хоч один розв'язок.

Таким чином, вірне наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай функція $f\left(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)}\right)$ визначена та неперервна в області D, виконується нерівність (11), а також множина S не порожня. Тоді задача (1), (2) має в S хоча б один розв'язок.*

Дослідимо умови, при яких розв'язок єдиний. При цьому будемо вважати, що в області D функція $f(t,y_0,\ldots,y_{n-1})$ задовольняє умови Ліпшиця за змінними $y_0,\ldots,y_{n-1}$ з матрицями K_s, $s=0,1,\ldots,n-1$, відповідно. Тобто для двох довільних точок $(t,y_0,\ldots,y_{n-1})$, $(t,\tilde y_0,\ldots,\tilde y_{n-1})\in D$ виконується нерівність

$$|f(t,y_0,y_1,\ldots,y_{n-1})-f(t,\tilde y_0,\tilde y_1,\ldots,\tilde y_{n-1})|\le\sum_{i=1}^{n-1}K_i\cdot|y_i-\tilde y_i|. \tag{12}$$

Побудуємо послідовні наближення, визначивши їх рівностями

$$u_{k+1}=Au_k(t),\ \ k=0,1,\ldots, \tag{13}$$

та вибравши за початкове наближення вектор $u_0(t)=\begin{pmatrix} p(t,x_1,\ldots,x_n)\\ p'(t,x_1,\ldots,x_n)\\ \ldots\\ p^{(n-1)}(t,x_1,\ldots,x_n)\end{pmatrix}$.

Враховуючи (12), знаходимо

$$|u_{k+1}(t)-u_k(t)|=|Au_k-Au_{k-1}|$$

$$\le\begin{pmatrix} \int\limits_0^h|K(t,s)|\cdot|f(s,(u_0(s))_k,\ldots,(u_{n-1}(s))_k)-f(s,(u_0(s))_{k-1},\ldots,(u_{n-1}(s))_{k-1})|\,ds\\ \int\limits_0^h\left|\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\right|\cdot|f(s,(u_0(s))_k,\ldots,(u_{n-1}(s))_k)-f(s,(u_0(s))_{k-1},\ldots,(u_{n-1}(s))_{k-1})|\,ds\\ \ldots\\ \int\limits_0^h\left|\frac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial t^{n-1}}\right|\cdot|f(s,(u_0(s))_k,\ldots,(u_{n-1}(s))_k)-f(s,(u_0(s))_{k-1},\ldots,(u_{n-1}(s))_{k-1})|\,ds\end{pmatrix}$$

$$\le\begin{pmatrix} hk_0\sum\limits_{i=1}^{n-1}K_i\,|(u_i(t))_k-(u_i(t))_{k-1}|_c\\ hk_1\sum\limits_{i=1}^{n-1}K_i\,|(u_i(t))_k-(u_i(t))_{k-1}|_c\\ \ldots\\ hk_{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}K_i\,|(u_i(t))_k-(u_i(t))_{k-1}|_c\end{pmatrix}.$$

Із одержаної векторної нерівності отримуємо рекурентне співвідношення

$$|r_{k+1}(t)|_c\le Q\,|r_k(t)|_c, \tag{14}$$

$$Q=h\cdot\sum_{i=0}^{n-1}k_iK_i,\qquad r_k(t)=\sum_{i=0}^{n-1}K_i\,|(u_i)_k-(u_i)_{k-1}|,\qquad k=0,1,\ldots.$$

Ітеруючи нерівність (14), дістаємо $|r_{k+1}(t)|_c\le Q^k\,|r_1(t)|_c$. Сказане вище дозволяє сформулювати наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, нерівність (12), а також всі власні значення матриці Q лежать в одиничному крузі. Тоді задача (1), (2) має єдиний розв'язок $x_*(t)$, до якого при $k\to\infty$ рівномірно по $t\in[0,h]$ збігається послідовність векторних функцій (13). Похибка характеризується при цьому векторною нерівністю*

$$\begin{pmatrix}|x_k(t)-x_*(t)|\\ |x'_k(t)-x'_*(t)|\\ \ldots\\ |x_k^{(n-1)}(t)-x_*^{(n-1)}(t)|\end{pmatrix}\le Q^k\,(E-Q)^{-1}\,|u_1(t)-u_0(t)|_c, \tag{15}$$

де E — одинична матриця, $k=1,2,3,\ldots$.

Доведення. Оскільки всі власні значення матриці Q лежать в одиничному крузі, то $\sum\limits_{i=0}^{l-1}Q^{k+i}\le Q^k\cdot\sum\limits_{i=0}^{\infty}Q^i=Q^k\cdot(E-Q)^{-1}$, $\lim_{k\to\infty}Q^k=\Theta$. Тому

$$|r_{l+k}(t)-r_k(t)|_c\le\sum_{i=0}^{l-1}Q^{k+i}\cdot|r_1(t)-r_0(t)|_c\le Q^k\cdot(E-Q)^{-1}\cdot|r_1(t)-r_0(t)|_c. \tag{16}$$

Звідси випливає рівномірна по $t \in [0, h]$ збіжність послідовностей $\{(u_i(t))_k\}$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $\lim_{k\to\infty} (u_i(t))_k = (u_i(t))_*$, $(u_0(t))_* = x_*(t)$. Послідовні наближення $(u_i(t))_k$ належать області D. Це випливає із структури множини S. Очевидно, що функція $x_*(t)$ задовольняє умови (2), оскільки ці умови задовольняють всі наближення $x_k(t)$. Оцінки похибок (15) випливають із (16) граничним переходом при $l \to \infty$. Єдиність розв'язку $x_*(t)$ обґрунтовується методом від супротивного. Теорема доведена. □

Зауважимо, що в скалярному випадку задачі (1), (2) достатні умови існування розв'язків у роботах [1, 2, 3] отримані у вигляді нерівностей

$$q_1 = \sum_{i=0}^{n-1} K_{n-i-1} \cdot \frac{h^{i+1}}{(i+1)!} < 1, \qquad q_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{K_{n-i-1} \cdot h^{i+1}}{(i+1)\cdot 2^{i+1} \cdot \left[\frac{i+1}{2}\right]! \cdot \left[\frac{i}{2}\right]!} < 1,$$

$$q_3 = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n-i-1}{n\cdot(i+1)!} \cdot K_{n-i-1} \cdot h^{i+1} + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n \cdot n!} \cdot h^n \cdot K_0 < 1.$$

Результати теореми 2 дозволяють покращити дані оцінки та визначити більш широкий клас рівнянь, для яких існують розв'язки задачі (1), (2), а алгоритм (13) дає змогу знаходити такі розв'язки.

REFERENCES

[1] Ch. J. de la Valle Poussin. *Sur lequation differentielle du second ordre. Determination d'une integrale, par deux valours assignees. Extension aux eqation d'ordre.* J. de Math. pur et appl. 1929, **8**, 125–144.

[2] Bessmertnych G.A., Levin A.Yu. *About some estimates of differentiable functions of one variable.* Doklady Acad. Sci. USSR 1962, **144** (3), 171–174. (in Russian)

[3] Levin A.Yu. *The estimation of function with a monotonically distributed zeros of subsequent derivatives.* Math. Sbornik 1964, **64** (5), 396–409. (in Russian)

[4] Sobkovich R.I., Kazmerchuk A.I. *Solvability of n-point problems with parameter for system of differential equations.* Carpathian Math. Publ. 2010, **2** (2), 116–122. (in Ukrainian)

Надійшло 24.01.2013

Sobkovich R.I., Kazmerchuk A.I. *Construction on the Green function for Vallée-Poussin problem for non-linear system of differential equations.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 121–128.

Existence and uniqueness theorems of solution of n-point Vallée-Poussin problem for system of nonlinear differential equations are proved. Iterative schemes for finding them are proposed.

Key words and phrases: system of differential equations, Green function.

Собкович Р.И., Казмерчук А.И. *Построение функции Грина в задаче Валле-Пуссена для нелинейных систем дифференциальных уравнений* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 121–128.

В случае многоточечной краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейных систем дифференциальных уравнений доказаны теоремы существования и единственности решений. Предложены итерационные схемы для их определения.

Ключевые слова и фразы: система дифференциальных уравнений, функция Грина.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp

Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.5

KHATS' R.V.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF AVERAGING OF ENTIRE FUNCTIONS OF IMPROVED REGULAR GROWTH

Khats' R.V. *Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 129–133.

Using the Fourier series method for entire functions, we investigate the asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth.

Key words and phrases: entire function of completely regular growth, entire function of improved regular growth, Fourier series method.

Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, Ukraine
E-mail: khats@ukr.net

It is well known that an entire function f of order $\rho \in (0, +\infty)$ with the indicator h is of *completely regular growth* in the Levin-Pflüger sense [5, p. 183] if the relation

$$\log|f(z)| = |z|^\rho h(\varphi) + o(|z|^\rho), \quad z \to \infty, \quad \varphi = \arg z \in [0, 2\pi),$$

holds outside an exceptional set $C_0 \subset \mathbb{C}$ of disks of zero linear density. In the theory of entire functions of completely regular growth (see [5, pp. 182–217], [1], [2]) the following theorem is valid.

Theorem A. *([5, p. 194]) If an entire function f of order $\rho \in (0, +\infty)$ with the indicator h is of completely regular growth, then*

$$I_f^r(\varphi) := \int_1^r \frac{dt}{t} \int_1^t \frac{\log|f(ue^{i\varphi})|}{u}\, du = \frac{r^\rho}{\rho^2} h(\varphi) + o(r^\rho), \quad r \to +\infty,$$

holds uniformly in $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Similar results for entire functions of ρ-regular growth were obtained by A. Grishin [3] and for meromorphic functions of completely regular growth of finite λ-type [10, p. 75] by A. Kondratyuk [10, p. 112] and Ya. Vasyl'kiv [12] (see also Yu. Lapenko [11]).

In [13, 6], the notion of an entire function of improved regular growth was introduced, and criteria for this regularity were established in terms of the distribution of zeros that are located on a finite number of rays. In [4] this notion was generalized to subharmonic functions. A criterion for the improved regular growth of entire functions of positive order with zeros on a finite system of rays in terms of their Fourier coefficients was established in [7].

An entire function f is called a function of *improved regular growth* (see [13, 6, 7]) if for some $\rho \in (0, +\infty)$ and $\rho_1 \in (0, \rho)$, and a 2π-periodic ρ-trigonometrically convex function

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

$h(\varphi) \not\equiv -\infty$ there exists a set $U \subset \mathbb{C}$ contained in the union of disks with finite sum of radii and such that

$$\log|f(z)| = |z|^\rho h(\varphi) + O(|z|^{\rho_1}), \quad U \not\ni z = re^{i\varphi} \to \infty.$$

If f is an entire function of improved regular growth, then it has [13] the order ρ and indicator h.

In the present paper, using the Fourier series method [10] for the logarithm of the modulus of an entire function we obtain an analog of Theorem A for the class of entire functions of improved regular growth. Our principal result is the following theorem (see also [9]), which improves the results of papers [8, 14].

Theorem 1. *If an entire function f of order $\rho \in (0,+\infty)$ is of improved regular growth, then for some $\rho_2 \in (0,\rho)$*

$$I_f^r(\varphi) = \frac{r^\rho}{\rho^2}h(\varphi) + O(r^{\rho_2}), \quad r \to +\infty,$$

holds uniformly in $\varphi \in [0,2\pi]$.

To prove Theorem 1, we need some preliminaries. Let f be an entire function with $f(0)=1$, let $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be the sequence of its zeros, let Q_k be the coefficient of z^k in the exponential factor in the Hadamard-Borel representation [5, p. 38] of an entire function f of order $\rho \in (0,+\infty)$, and let

$$c_k(r,\log|f|) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$c_k(r, I_f^r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} I_f^r(\varphi)\,d\varphi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r > 0.$$

Put ([10, p. 104], [12])

$$n_k(r,f) := \sum_{|\lambda_n|\le r} e^{-ik\arg\lambda_n}, \quad N_k(r,f) := \int_0^r \frac{n_k(t,f)}{t}\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Then (see [10, p. 107], [12])

$$c_k(r, I_f^r) = \int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \frac{c_k(u,\log|f|)}{u}\,du, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

and

$$N_k(r,f) = c_k(r,\log|f|) - k^2 c_k(r, I_f^r), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r > 0. \tag{2}$$

Lemma 1. *([7]) Let f be an entire function of improved regular growth of order $\rho \in (0,+\infty)$. Then for some $\rho_3 \in (0,\rho)$ and each $k \in \mathbb{Z}$*

$$c_k(r,\log|f|) = c_k r^\rho + O(r^{\rho_3}), \quad r \to +\infty,$$
$$N_k(r,f) = c_k(1 - k^2/\rho^2)r^\rho + O(r^{\rho_3}), \quad r \to +\infty, \tag{3}$$

where

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}h(\varphi)\,d\varphi.$$

By $M_1, M_2, \ldots$ we denote some positive constants.

Lemma 2. *If an entire function f of order $\rho \in (0,+\infty)$ is of improved regular growth, then*

$$|c_k(r, I_f^r)| \le \frac{M_1}{k^2}r^\rho + \frac{M_2}{k^2}r^{\rho_3}, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{4}$$

for some $\rho_3 \in (0,\rho)$ and all $r > 0$.

Proof. Let ρ be noninteger and $p = [\rho]$. Then (see [10, pp. 10, 120, 124], [12])

$$c_k(r,\log|f|) = \overline{c_{-k}(r,\log|f|)}, \quad k \le -1, \quad c_0(r,\log|f|) = N_0(r,f), \tag{5}$$

$$c_k(r,\log|f|) = \frac{1}{2}Q_k r^k + \frac{k}{2}\int_0^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right)\frac{N_k(t,f)}{t}\,dt + N_k(r,f), \quad 1 \le k \le p, \tag{6}$$

and

$$c_k(r,\log|f|) = -\frac{k}{2}\left(r^{-k}\int_0^r t^{k-1}N_k(t,f)\,dt + r^k\int_r^{+\infty} t^{-k-1}N_k(t,f)\,dt\right) + N_k(r,f), \tag{7}$$

for $k \ge p+1$. Since $|N_k(r,f)| \le N_0(r,f)$ for each $k \in \mathbb{Z}$, then using (3) and (6), we obtain

$$|c_k(r,\log|f|)| \le \frac{1}{2}|Q_k|r^k + \frac{k}{2}\int_0^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right)\frac{N_0(t,f)}{t}\,dt + N_0(r,f)$$

$$\le \frac{1}{2}|Q_k|r^k + \frac{k}{2}\int_0^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right)(c_0 t^{\rho-1} + O(t^{\rho_3-1}))\,dt + c_0 r^{\rho-1} + O(r^{\rho_3-1})$$

$$= \frac{c_0\rho^2}{\rho^2-k^2}r^\rho + \frac{O(r^{\rho_3})}{\rho_3^2-k^2}, \quad 1 \le k \le p < \rho_3, \tag{8}$$

as $r \to +\infty$. Similarly, using formulas (3) and (7), we get

$$|c_k(r,\log|f|)| \le \frac{2k^2-\rho^2}{k^2-\rho^2}c_0 r^\rho + \frac{2k^2-\rho_3^2}{k^2-\rho_3^2}O(r^{\rho_3}), \quad k \ge p+1 > \rho, \tag{9}$$

as $r \to +\infty$. Therefore, from (2), (3) and (8) it follows

$$|c_k(r, I_f^r)| \le \frac{|c_k(r,\log|f|)| + N_0(r,f)}{k^2} \le \frac{2\rho^2-k^2}{k^2(\rho^2-k^2)}c_0 r^\rho + \frac{\rho_3^2-k^2+1}{k^2(\rho_3^2-k^2)}O(r^{\rho_3})$$

$$\le \frac{M_3}{k^2}r^\rho + \frac{M_4}{k^2}r^{\rho_3}, \quad r > 0, \quad 1 \le k \le p < \rho_3. \tag{10}$$

Similarly, from (2), (3) and (9), we get

$$|c_k(r, I_f^r)| \le \frac{3k^2-2\rho^2}{k^2(k^2-\rho^2)}c_0 r^\rho + \frac{3k^2-2\rho_3^2}{k^2(k^2-\rho_3^2)}O(r^{\rho_3})$$

$$\le \frac{M_5}{k^2}r^\rho + \frac{M_6}{k^2}r^{\rho_3}, \quad r > 0, \quad k \ge p+1 > \rho. \tag{11}$$

Thus, relations (1), (5), (10) and (11) imply (4). The case $\rho \in \mathbb{N}$ is considered analogously. Lemma 2 is proved. □

Proof of Theorem 1. Using (1) and (2), we have

$$c_k(r, I_f^r) = \frac{c_k(r, \log|f|) - N_k(r,f)}{k^2}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

and

$$c_0(r, I_f^r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{c_0(u, \log|f|)}{u}\, du.$$

Moreover, according to Lemma 1, we get

$$c_0(r, I_f^r) = c_0 \frac{r^\rho}{\rho^2} + O(r^{\rho_3}),$$

$$c_k(r, I_f^r) = c_k \frac{r^\rho}{\rho^2} + \frac{O(r^{\rho_3})}{k^2}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

as $r \to +\infty$ for some $\rho_3 \in (0, \rho)$. Therefore, taking into account Lemma 2, we obtain

$$I_f^r(\varphi) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(r, I_f^r) e^{ik\varphi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c_k(r, I_f^r) e^{ik\varphi} + c_0(r, I_f^r)$$

$$= \frac{r^\rho}{\rho^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\varphi} + O(r^{\rho_3}) = \frac{r^\rho}{\rho^2} h(\varphi) + O(r^{\rho_3}),$$

as $r \to +\infty$ uniformly in $\varphi \in [0, 2\pi]$. □

REFERENCES

[1] Gol'dberg A.A. *B.Ya. Levin, the founder of the theory of entire functions of completely regular growth.* Mat. Fiz., Anal., Geom. 1994, **1** (2), 186–192. (in Russian)

[2] Gol'dberg A.A., Levin B.Ya., Ostrovskii I.V. *Entire and meromorphic functions.* VINITI 1991, **85**, 5–186. (in Russian)

[3] Grishin A.F. Subharmonic functions of finite order, Doctor-Degree Thesis (Physics and Mathematics). Kharkov, 1992. (in Russian)

[4] Hirnyk M.O. *Subharmonic functions of improved regular growth.* Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. 2009, **4**, 13–18. (in Ukrainian) doi: 10.1007/s11253-012-0624-2

[5] Levin B.Ya. Distribution of zeros of entire functions, Gostekhizdat, Moscow, 1956. (in Russian)

[6] Khats' R.V. *On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays.* Mat. Stud. 2006, **26** (1), 17–24.

[7] Khats' R.V. *Regularity of growth of Fourier coefficients of entire functions of improved regular growth.* Ukr. Mat. Zh. 2011, **63** (12), 1717–1723 (in Ukrainian); English translation: Ukr. Math. J. 2012, **63** (12), 1953–1960. doi: 10.1007/s11253-012-0624-2

[8] Khats' R.V. *Averaging of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays.* Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky 2011, **718** (718), 10–14.

[9] Khats' R.V. Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth. In: Proc. of Intern. Conf. dedicated to 120-th anniv. of Stefan Banach, Lviv, Ukraine, September 17–21 2012, 136–137.

[10] Kondratyuk A.A. Fourier series and meromorphic functions, Vyshcha shkola, Lviv, 1988. (in Russian)

[11] Lapenko Yu.P. On entire and meromorphic functions of completely regular growth and their defects, Candidate-Degree Thesis (Physics and Mathematics), Rostov-on-Don, 1981. (in Russian)

[12] Vasyl'kiv Ya.V. *Asymptotic behavior of logarithmic derivatives and logarithms of meromorphic functions of completely regular growth in the metric of $L^p[0, 2\pi]$. I.* Mat. Stud. 1999, **12** (1), 37–58. (in Ukrainian)

[13] Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. *On growth regularity of entire function of noninteger order with zeros on a finite system of rays.* Mat. Stud. 2005 **24** (1), 31–38. (in Ukrainian)

[14] Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. *On asymptotic properties of entire functions, similar to the entire functions of completely regular growth.* Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky 2011, **718** (718), 5–9.

Received 14.11.2012

Хаць Р.В. *Асимптотична поведінка усереднення цілих функцій покращеного регулярного зростання* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — C. 129–133.

За допомогою методу рядів Фур'є для цілих функцій досліджено асимптотичну поведінку усереднення цілих функцій покращеного регулярного зростання.

Ключові слова і фрази: цілі функції цілком регулярного зростання, цілі функції покращеного регулярного зростання, метод рядів Фур'є.

Хаць Р.В. *Асимптотическое поведение усреднения целых функций улучшенного регулярного роста* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — C. 129–133.

С помощью метода рядов Фурье для целых функций исследовано асимптотическое поведение усреднения целых функций улучшенного регулярного роста.

Ключевые слова и фразы: целые функции вполне регулярного роста, целые функции улучшенного регулярного роста, метод рядов Фурье.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 511.3

Холявка Я.М.

ПРО МІРУ АЛГЕБРАЇЧНОЇ НЕЗАЛЕЖНОСТІ МОДУЛЯ ТА ЗНАЧЕНЬ ЕЛІПТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ЯКОБІ

Холявка Я.М. *Про міру алгебраїчної незалежності модуля та значень еліптичної функції Якобі* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 134–142.

Доводиться оцінка міри алгебраїчної незалежності модуля та значень в різних алгебраїчних точках еліптичної функції Якобі.

Ключові слова і фрази: міра алгебраїчної незалежності, еліптична функція Якобі.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
E-mail: ya_khol@franko.lviv.ua

Вступ

Нехай $\mathrm{sn}(z)$ — еліптична функція Якобі [3], $\varkappa$ — еліптичний модуль $\mathrm{sn}(z)$, $\varkappa^2 \in (0,1)$.

В роботах [8, 4, 16, 21] доведено еліптичний аналог теореми Ліндемана [2] та отримано оцінку міри алгебраїчної незалежності значень в алгебраїчних точках еліптичних функцій Вейєрштрасса та Якобі з алгебраїчними інваріантами і модулем відповідно.

В цій роботі отримано оцінку міри алгебраїчної незалежності значень в алгебраїчних точках еліптичної функції Якобі $\mathrm{sn}(z)$ у випадку трансцендентного $\varkappa$.

Нехай $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — задані алгебраїчні числа, лінійно незалежні над $\mathbb{Q}$. Позначимо степінь трансцендентності $\mathbb{Q}(\varkappa, \mathrm{sn}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{sn}(\alpha_n))$ через k. Будемо вважати, що алгебраїчно незалежними є числа $\varkappa, \mathrm{sn}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{sn}(\alpha_{k-1})$. Позначимо їх через $\beta_1, \ldots, \beta_k$.

Теорема 1. *Для довільного многочлена $A \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$, $A \not\equiv 0$, степінь якого не перевищує D і висота не перевищує H, $\ln\ln H \geqslant c_1 D^k \ln(D+1)$, справджується*

$$|A(\beta_1, \ldots, \beta_k)| \geqslant H^{-c_2 D^k}, \tag{1}$$

де c_1, c_2 — додатні константи, залежні лише від $\varkappa$ і $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$.

Доводити цю теорему будемо методом Нестеренко, викладеному у [7]–[14].

У наступному пункті наведено допоміжні твердження, необхідні для доведення теореми 1. У пункті 2 доведено теорему 2, з якої випливає оцінка (1). Означення основних понять, пов'язаних з мірою алгебраїчної незалежності, сформульовані в [19, 2, 15].

2010 *Mathematics Subject Classification:* 11J82, 11J89.

1 Допоміжні твердження

Означення наступних понять, формулювання і доведення необхідних властивостей ідеалів можна знайти в [22], [7].

Позначимо через $\dim I$ проективну розмірність однорідного ідеалу I, через $\deg I$ та $H(I)$ — величини, аналогічні степеневі многочлена та його висоті, через $h(I)$ — висоту ідеалу, яка характеризує кількість зв'язків, накладених многочленами цього ідеалу. Для $\overline{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ покладемо $|\overline{\gamma}| = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant m} |\gamma_j|$.

Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathbb{K}[\overline{x}]$ — кільце многочленів від змінних $x_0, \ldots, x_m$ над $\mathbb{K}$. Для кожного однорідного незмішаного ідеалу I, $I \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$ і ненульової точки $\overline{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$ через $|I(\overline{\gamma})|$ позначимо величину, аналогічну величині многочлена в точці $\overline{\gamma}$.

Лема 1.1. *Нехай I — незмішаний простий ідеал кільця $\mathbb{K}[\overline{x}]$, $\dim I \geqslant 0$, $I = I_1 \cap \cdots \cap I_s$ — нескоротний примарний розклад, $\mathfrak{p}_j = \sqrt{I_j}$, k_j — показник примарного ідеалу I_j. Нехай $\overline{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$, $\overline{\gamma} \neq 0$, тоді*

1) $\sum_{j=1}^{s} k_j \deg \mathfrak{p}_j = \deg I$;

2) $\sum_{j=1}^{s} k_j \ln H(\mathfrak{p}_j) \leqslant \ln H(I) + m^2 \deg I$;

3) $\sum_{j=1}^{s} k_j \ln |\mathfrak{p}_j(\overline{\gamma})| \leqslant \ln |I(\overline{\gamma})| + m^3 \deg I$.

Лему 1.1 доведено в [7, Твердження 1.2].

Позначимо через $H(P)$ висоту многочлена P, $H(P) = \max |a_i|$, де a_i — коефіцієнти многочлена P, $h(P)$ — логарифмічна висота P, $\|P\|_{\overline{\gamma}} = |P(\overline{\gamma})| \cdot H(P)^{-1} \cdot |\overline{\gamma}|^{-\deg P}$.

Для двох ненульових точок $\overline{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$ і $\overline{\vartheta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ через

$$\|\overline{\gamma} - \overline{\vartheta}\| = \left(\max_{0\leqslant i<j\leqslant m} |\gamma_i \vartheta_j - \gamma_j \vartheta_i|\right) |\overline{\gamma}|^{-1} |\overline{\vartheta}|^{-1}$$

позначимо відстань між $\overline{\gamma}$ и $\overline{\vartheta}$.

Лема 1.2. *Нехай $\mathfrak{p}$ — однорідний простий ідеал кільця $\mathbb{K}[\overline{x}]$, $\dim \mathfrak{p} \geqslant 0$; Q — однорідний многочлен з $\mathbb{K}[\overline{x}]$, $Q \notin \mathfrak{p}$. Якщо $r = 1 + \dim \mathfrak{p} \geqslant 2$, то існує однорідний незмішаний ідеал $J \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$, нулі якого співпадають з нулями ідеалу $(\mathfrak{p}, Q)$, $\dim J = \dim \mathfrak{p} - 1$ такий, що*

1) $\deg J \leqslant \deg \mathfrak{p} \cdot \deg Q$;

2) $\ln H(J) \leqslant \ln H(\mathfrak{p}) \deg Q + \ln H(Q) \deg \mathfrak{p} + m(r+1) \deg \mathfrak{p} \cdot \deg Q$;

3) *для довільної точки $\overline{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$ і $\rho = \min \|\overline{\gamma} - \overline{\vartheta}\|$, де мінімум береться по усіх нетривіальних нулях $\overline{\vartheta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ ідеалу $\mathfrak{p}$, справджується нерівність*

$$\ln |J(\overline{\gamma})| \leqslant \ln \delta + \ln H(Q) \deg \mathfrak{p} + \ln H(\mathfrak{p}) \deg Q + 11 m^2 \deg \mathfrak{p} \cdot \deg Q, \tag{2}$$

де

$$\delta = \begin{cases} \|Q\|_{\overline{\gamma}}, & \text{якщо } \rho < \|Q\|_{\overline{\gamma}}, \\ |\mathfrak{p}(\overline{\gamma})|, & \text{якщо } \rho \geqslant \|Q\|_{\overline{\gamma}}. \end{cases}$$

Нерівність (2) справджується і при $r = 1$, якщо вважати у цьому випадку $|J(\overline{\gamma})| = 1$.

Лему 1.2 доведено в [7, Твердження 1.4].

Лема 1.3. *Нехай $I \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$ — однорідний незмішаний ідеал, $r = 1 + \dim I \geqslant 1$. Для довільної ненульової точки $\overline{\gamma} \in \mathbb{C}^{m+1}$ існує нуль $\overline{\vartheta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ ідеалу I такий, що*

$$\deg I \cdot \ln \|\overline{\gamma} - \overline{\vartheta}\| \leqslant \frac{1}{r}\left(\ln |I(\overline{\gamma})| + h(I)\right) + 4m^3 \deg I.$$

Лему 1.3 доведено в [7, Твердження 1.5].

Лема 1.4. *Якщо Q — однорідний многочлен кільця $\mathbb{K}[\overline{x}]$ і $\overline{\gamma}, \overline{\vartheta} \in \mathbb{C}^{m+1}$ — ненульові точки, причому $Q(\overline{\vartheta}) = 0$, то справджується нерівність*

$$\|Q\|_{\overline{\gamma}} \leqslant \|\overline{\gamma} - \overline{\vartheta}\| \cdot e^{(2m-1)\deg Q}.$$

Лему 1.4 доведено в [7].

Дотримуватимемось стандартних позначень в теорії еліптичних функцій [3]. Позначимо через $4K$ і $2iK'$ основні періоди $\operatorname{sn}(z)$. Покладемо

$$\overline{\omega} = (\omega_0, \ldots, \omega_m), \omega_0 = 1, \omega_1 = \varkappa^2, \omega_{2j} = \operatorname{sn}(\alpha_j), \omega_{2j+1} = \operatorname{sn}'(\alpha_j), 1 \leqslant j \leqslant n; m = 2n+1.$$

Лема 1.5. *Для довільного вектора $\overline{l} = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\overline{l} \neq 0$, існують однорідні многочлени $S_{\overline{l}}$, $T_{\overline{l}}$, $U_{\overline{l}} \in \mathbb{Z}[\overline{x}]$, для яких*

1) *степінь не перевищує $c_3(l_1^2 + \cdots + l_n^2)$;*

2) *висота не перевищує $\exp(c_3(l_1^2 + \cdots + l_n^2))$;*

3) $\operatorname{sn}(l_1\alpha_1 + \ldots + l_n\alpha_n) = T_{\overline{l}}(\overline{\omega})/U_{\overline{l}}(\overline{\omega})$, $\quad \operatorname{sn}'(l_1\alpha_1 + \ldots + l_n\alpha_n) = S_{\overline{l}}(\overline{\omega})/U_{\overline{l}}(\overline{\omega})$.

Крім того,

$$|U_{\overline{l}}(\overline{\omega})| \geqslant \exp(-c_3(l_1^2 + \cdots + l_n^2)).$$

Доведення Леми 1.5 подібне доведенню Леми 7.2 з [1] і Леми 1 з [6].

Нехай Λ — решітка в $\mathbb{C}$ і $\mathfrak{M} \subset \mathbb{C}$. Число α назвемо $\mathfrak{M}$-допустимим відносно Λ, якщо α конгруентне за модулем Λ деякій точці множини $\mathfrak{M}$.

Лема 1.6. *Нехай $z_1, \ldots, z_n$ — комплексні числа, лінійно незалежні над $\mathbb{Q}$ за модулем решітки Λ. Існують така компактна множина $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subset \mathbb{C}$, яка не містить точок Λ, і таке число L_0, що для довільного дійсного числа L_1, $L_1 \geqslant L_0$, серед точок $l_1z_1 + \cdots + l_nz_n$, $0 \leqslant l_j < L_1$, $l_j \in \mathbb{Z}$, знайдеться не менше $\frac{7}{8}L_1^n$ $\mathfrak{M}$-допустимих. Множина $\mathfrak{M}$ і число L_0 залежить лише від Λ і $z_1, \ldots, z_n$.*

Лему 1.6 доведено в [17, Лема 5]. Будемо її застосовувати, коли $z_1 = \alpha_1, \ldots, z_n = \alpha_n$ і Λ є решіткою півперіодів $\operatorname{sn}(z)$, а множина $\mathfrak{M}$ визначається цими числами і решіткою.

Лема 1.7. *Функції*

$$\sigma((z+iK')/\sqrt{e_1-e_3}), \quad \sigma((z+iK')/\sqrt{e_1-e_3})\operatorname{sn}(z)$$

цілі і для $M_0 > 1$ виконуються нерівності

$$|\sigma((z+iK')/\sqrt{e_1-e_3})\operatorname{sn}(z)|_{|z|\leqslant M_0} \leqslant c_4^{M_0^2},$$

$$|\sigma((z+iK')/\sqrt{e_1-e_3})|_{|z|\leqslant M_0} \leqslant c_4^{M_0^2}.$$

Якщо δ — відстань від z_0 до найближчого полюсу $\operatorname{sn}(z)$ і $|z_0| \leqslant M_0$, тоді виконується $|\sigma((z+iK')/\sqrt{e_1-e_3})| \geqslant \delta c_5^{-M_0^2}$, де c_4, c_5 — сталі, що залежать лише від $\varkappa$.

Доведення Леми 1.7 аналогічне доведенню Леми 7.1 з [5].

Лема 1.8. *Нехай $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$, $8 < 4R_1 < R_2$, $f(z)$ аналітична в крузі $|z| \leqslant R_2$, E — множина з $\mathcal{D}^2$ точок, які належать кругу $|z| \leqslant R_1$, відстань між якими для кожної пари точок не менше ε, $0 < \varepsilon < 1$. Тоді*

$$|f(z)|_{|z|\leqslant R_1} \leqslant 2|f(z)|_{|z|\leqslant R_2}\left(\frac{4R_1}{R_2}\right)^{\mathcal{D}^2 S} + 2\mathcal{D}R_1^{-1}\left(\frac{33R_1}{\varepsilon\mathcal{D}}\right)^{\mathcal{D}^2 S} \max_{x\in E, 0\leqslant s\leqslant S}\left|\frac{f^{(s)}(x)}{s!}\right|. \qquad (3)$$

Лему 1.8 доведено в [18].

2 Доведення Теореми 1

У цьому розділі доведемо Теорему 2 і покажемо, як з неї можна отримати Теорему 1.

Теорема 2. *Для кожного цілого r, $1 \leqslant r \leqslant k$, існують такі сталі $\mu_r \geqslant 0$, $\gamma_r \geqslant 1$, що для довільних D і H, $\ln\ln H \geqslant \gamma_r D^k \ln(D+1)$ і для довільного однорідного незмішаного ідеалу $I \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$ з умовами $h(I) = m - r + 1$, $\deg I \leqslant D^{k-r+1}$, $\ln H(I) \leqslant D^{k-r}\ln H$ справджується*

$$\ln |I(\overline{\omega})| \geqslant -\mu_r (D \ln H(I) + \deg I \ln H) D^{r-1}.$$

Покажемо як з Теореми 2 випливає Теорема 1.

Для довільного ненульового многочлена $B \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}]$ позначимо

$$C(x_0, x_1, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}) = x_0^{\deg B} B\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_4}{x_0}, \ldots, \frac{x_{2n}}{x_0}\right).$$

Тоді

$$C(1, \varkappa, \operatorname{sn}(\alpha_1), \ldots, \operatorname{sn}(\alpha_n)) = B(\varkappa, \operatorname{sn}(\alpha_1), \ldots, \operatorname{sn}(\alpha_n)). \qquad (4)$$

Існують многочлени R_{k+i}, $Q_j \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$, $i = 0, \ldots, n-k$, $j = 1, \ldots, n$ такі, що $R_{k+i}(\varkappa, \operatorname{sn}\alpha_1, \ldots, \operatorname{sn}\alpha_{k-1}, \operatorname{sn}\alpha_{k+i}) = 0$ і $Q_j(\varkappa, \operatorname{sn}\alpha_j, \operatorname{sn}'\alpha_j) = 0$. Ідеал $\mathfrak{J}$, породжений однорідними многочленами, що відповідають R_{k+i} і Q_j, має розмірність $k+1$. Позначимо через $\mathfrak{p}$ однорідний простий ідеал, породжений усіма однорідними многочленами кільця $\mathbb{Z}[\overline{x}]$, які рівні нулю в точці $\overline{\omega}$. Тоді отримаємо $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{p}$, тому $h(\mathfrak{p}) \geqslant 2n - k + 1$. Але якщо $r = m + 1 - h(\mathfrak{p}) \leqslant k$, то для таких r з Теореми 2 отримаємо $|\mathfrak{p}(\omega)| > 0$, що суперечить вибору $\mathfrak{p}$. Отже, $m + 1 - h(\mathfrak{p}) > k$, тобто $h(\mathfrak{p}) < m - k + 1$, тому $h(\mathfrak{p}) = 2n - k + 1$.

Нехай J — однорідний незмішаний ідеал в кільці $\mathbb{Z}[\overline{x}]$, побудований для ідеалу $\mathfrak{p}$ і многочлена C згідно Леми 1.2. Тоді

$$\dim J = \dim \mathfrak{p} - 1, \quad \deg J \leqslant c_6 \deg C, \quad \ln H(J) \leqslant c_7(\ln H(C) + \deg C),$$

$$\ln |J(\overline{\omega})| \leqslant \ln \|C\|_{\overline{\omega}} + c_8(\ln H(C) + \deg C). \qquad (5)$$

Застосувавши до ідеалу J Теорему 2 і враховуючи (4), з (5) отримаємо нерівність

$$\ln |B(\varkappa, \operatorname{sn}(\alpha_1), \ldots, \operatorname{sn}(\alpha_n))| \geqslant -c_9(D \ln H(I) + \deg I \ln H)D^{k-1}. \qquad (6)$$

Числа $\beta_1, \ldots, \beta_k$ алгебраїчні над полем $\mathbb{Q}(\varkappa, \operatorname{sn}(\alpha_1), \ldots, \operatorname{sn}(\alpha_n))$. Тоді для деякого цілого алгебраїчного над кільцем $\mathbb{Q}[\varkappa, \operatorname{sn}(\alpha_1), \ldots, \operatorname{sn}(\alpha_n)]$ числа d усі числа $d\beta_i$ — цілі алгебраїчні над $\mathbb{Q}[\varkappa, \operatorname{sn}(\alpha_1), \ldots, \operatorname{sn}(\alpha_n)]$.

Покладемо для многочлена $A \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$, $A \not\equiv 0$,

$$B(\varkappa, \mathrm{sn}(\alpha_1), \dots, \mathrm{sn}(\alpha_n)) = d^{\deg A} \|A\|_{(\beta_1, \dots, \beta_k)}. \tag{7}$$

Так як $\deg B \leqslant c_{10} \deg A$, $\ln H(B) \leqslant c_{11} \ln H(A)$, то, враховуючи (6) і (7), отримаємо оцінку Теореми 1.

Доведемо Теорему 2 індукцією по r. Нехай r — найменше ціле число, $1 \leqslant r \leqslant k$, для якого твердження Теореми 2 не виконується. Для $r-1$ Теорема 2 справджується, тому визначене γ_{r-1}. Виберемо достатньо велике число λ і покладемо $\gamma_r = \gamma_{r-1}\lambda^{8k^2+4k}$.

Лема 2.1. *Для достатньо великого λ множина чисел D таких, що існує простий однорідний ідеал $\mathfrak{p}$ кільця $\mathbb{K}[\overline{x}]$ з умовами*

$$\ln \ln H \geqslant \gamma_r D^k \ln(D+1), \quad \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0), \quad h(\mathfrak{p}) = m - r + 1, \quad \deg \mathfrak{p} \leqslant D^{1-r+k},$$

$$\ln H(\mathfrak{p}) \leqslant 2D^{k-r} \ln H, \quad \ln |\mathfrak{p}(\overline{\omega})| < -\lambda^{8k^2+8k+4}(D \ln H(\mathfrak{p}) + \deg \mathfrak{p} \ln H) D^{r-1}$$

обмежена.

З Леми 2.1 випливає теорема 2. Якщо ця множина обмежена, то для деякої достатньо великої додатної сталої c_{12}, для усіх однорідних простих ідеалів $\mathfrak{p} \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$, $\dim \mathfrak{p} = r-1$, буде справджуватись

$$\ln |\mathfrak{p}(\overline{\omega})| \geqslant -c_{12}(D \ln H(\mathfrak{p}) + \deg \mathfrak{p} \ln H) D^{r-1}. \tag{8}$$

Застосовуючи Лему 1.1 до довільного однорідного незмішаного ідеалу $I \subset \mathbb{K}[\overline{x}]$ розмірності $r-1$ та враховуючи (8), отримаємо

$$\ln |I(\overline{\omega})| \geqslant -c_{13}(D \ln H(I) + \deg I \ln H) D^{r-1}.$$

Але це суперечить припущенню, що для ідеалів розмірності $r-1$ Теорема 2 не виконується. Отримана суперечність доводить Теорему 2.

Нехай H — достатньо велике число D і простий однорідний ідеал $\mathfrak{p}$ розмірності $r-1$ задовольняють умовам Леми 2.1. Визначимо число M рівністю

$$\lambda D^k M \ln M = \min\left\{\lambda^{8k^2+8k+4}(D \ln H(\mathfrak{p}) + \deg \mathfrak{p} \ln H) D^{r-1}, \ \frac{1}{2}\ln(1/\rho)\right\}, \tag{9}$$

де ρ визначене в Лемі 1.2. З Леми 1.3 і (9) отримаємо

$$M \ln M \geqslant \ln H (\ln \ln H)^{-1}. \tag{10}$$

З Леми 1.4 і (9) випливає

Лема 2.2. *Нехай однорідний многочлен $P \in \mathbb{K}[\overline{x}]$ міститься в ідеалі $\mathfrak{p}$ і задовольняє нерівності*

$$h(P) + (2m+1)\deg P \leqslant \lambda D^k M \ln M.$$

Тоді

$$|P(\overline{\omega})| |\overline{\omega}|^{-\deg P} \leqslant \exp\left(-\lambda D^k M \ln M\right).$$

З Леми 1.5, Леми 2.2 і (10) отримаємо наступне твердження.

Лема 2.3. *Якщо $\overline{l} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $|l_j| \leqslant \lambda^{4k+1} D^{1/2}$, тоді $U_{\overline{l}}(\overline{x}) \notin \mathfrak{p}$.*

З Леми 1.2, Леми 2.1, (9), (10) та індуктивного припущення отримаємо оцінку знизу.

Лема 2.4. *Нехай однорідний многочлен $P \in \mathbb{K}[\overline{x}]$ не лежить в ідеалі $\mathfrak{p}$ і задовольняє нерівності*

$$\deg P \leqslant \lambda^{8k+5} D, \quad \ln H(P) \leqslant \lambda^{8k+5} \ln H.$$

Тоді

$$|P(\overline{\omega})| |\overline{\omega}|^{-\deg P} \geqslant \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda D^k M \ln M\right).$$

Застосувавши Лему 2.4 до кожного базисного ідеалу, отримаємо наступне твердження.

Лема 2.5. *Якщо $\mathfrak{I}$ — ідеал $\mathbb{K}[\overline{x}]$, породжений усіма однорідними многочленами $P \in \mathbb{K}[\overline{x}]$ такими, що $P(\overline{\omega}) = 0$, тоді $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{p}$.*

Визначимо

$$L = \left[\lambda^{4k} D^{1/2}\right], \quad K_0 = \left[D^k M\right], \quad K_1 = \lambda^2, \quad S = \left[\lambda^{1-8k^2} M\right]. \tag{11}$$

Лема 2.6. *Існують такі однорідні многочлени $A_{\overline{k}} = A_{k_0,k_1}$, $A_{\overline{k}} \in \mathbb{K}[\overline{x}]$, $0 \leqslant k_0 < K_0$, $0 \leqslant k_1 < K_1$, що виконуються умови*

1) $\deg A_{\overline{k}} \leqslant \lambda^{4n+4} D$, $\ln H(A_{\overline{k}}) \leqslant 4\lambda^{1-2n^2} M \ln M$;

2) *хоча б один з цих многочленів не лежить в $\mathfrak{p}$;*

3) *для*

$$F(z) = \sum_{k_0=0}^{K_0-1} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} A_{\overline{k}}(\overline{\omega}) z^{k_0} \mathrm{sn}^{k_1}(z)$$

для всіх цілих чисел s, $0 \leqslant s \leqslant S$, в усіх $\mathfrak{M}$-допустимих точках $l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n$, $l_j \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant l_j < L$, виконуються нерівності

$$|F^{(s)}(l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n)| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda D^k M \ln M\right). \tag{12}$$

Доведення Леми 2.6 подібне до доведення Леми 10 в [8]. Покладемо

$$F^{(s)}(z) = \left(\frac{d}{dw}\right)^s (F(z+w))|_{w=0} = \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} \left(\frac{d}{dw}\right)^{s-t} \left[\prod_2^{-K_1}(\mathrm{sn}(z), \varphi(w))\right]_{w=0}$$
$$\times \left\{ \sum_{k_0=0}^{K_0-1} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} A_{\overline{k}}(\overline{\omega}) \sum_{i=0}^{t} \left[\binom{k_0}{i} \frac{t!}{(t-i)!} z^{k_0-i} G_{t-i,k_1,K_1-k_1}(\mathrm{sn}(z), \mathrm{sn}'(z))\right] \right\},$$

де $\varphi(w))$ та многочлени $G_{t,k,l}(x,y)$ визначені для $\mathrm{sn}(z)$ подібно, як в [8] для $\wp(z)$.

Для усіх цілих $s, l_1, \dots l_n$, $0 \leqslant s < S$, $0 \leqslant l_j < L$, $\widetilde{x} = (x_1, \dots x_m)$ визначимо

$$R_{s,\overline{l}}(\widetilde{x}) = \sum_{k_0=0}^{K_0-1} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} B_{\overline{k}}(\widetilde{x}) \sum_{i=0}^{t} \left[\binom{k_0}{i} \frac{t!}{(t-i)!} (l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n)^{k_0-i} U_{\overline{l}}^{10K_1}(1, \widetilde{x})\right.$$
$$\left. \times G_{t-i,k_1,K_1-k_1}(T_{\overline{l}}(1,\widetilde{x})/U_{\overline{l}}(1,\widetilde{x}), S_{\overline{l}}(1,\widetilde{x})/U_{\overline{l}}(1,\widetilde{x}))\right].$$

Згідно леми Зігеля [20] про розв'язки системи рівнянь з алгебраїчними коефіцієнтами, для системи

$$R_{s,\bar{l}}(\bar{x}) = 0,\ 0 \leqslant s < S,\ 0 \leqslant l_j < L,\ j = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

існують відмінні від нуля многочлени $B_{\bar{k}}(\bar{x}) \in \mathbb{K}[\bar{x}]$ такі, що $\deg B_{\bar{k}} \leqslant \lambda^{8k+4}D$, $\ln H(B_{\bar{k}}) \leqslant 3\lambda^{1-8k^2}M \ln M$. Як і в [8], нехай ${}^a\mathfrak{p}$ — дегомогенізація ідеалу $\mathfrak{p}$. Позначимо через u найменше ціле число таке, що існує вектор $\bar{u} = (u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{Z}^{m-1}, u_i \geqslant 0, u_2 + \cdots + u_m = u$ та існують індекси k_0^*, k_1^*, при яких $\delta_{\bar{u}} B_{k_0^*,k_1^*} \notin {}^a\mathfrak{p}$, де

$$\delta_{\bar{u}} = \prod_{i=2}^{m} \frac{1}{u_i!} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{u_i}.$$

Тоді з (13) випливає, що $\delta_{\bar{u}} R_{s,\bar{l}}(\bar{x}) \in {}^a\mathfrak{p}$. Нехай $C_{\bar{k}}(\bar{x}) = \delta_{\bar{u}} B_{k_0,k_1}(\bar{x})$, $A_{\bar{k}}(\bar{x})$ — гомогенізація $C_{\bar{k}}(\bar{x})$. Для усіх $\bar{k}$ справджується $A_{\bar{k}}(\bar{\omega}) = \delta_{\bar{u}} B_{k_0,k_1}(\bar{x})|_{\bar{\omega}}$ та серед $A_{\bar{k}}(\bar{x})$ існує такий, що не лежить в ідеалі $\mathfrak{p}$. Визначимо

$$Q_{s,\bar{l}}(\bar{x}) = \sum_{k_0=0}^{K_0-1} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} A_{\bar{k}}(\bar{x}) \sum_{i=0}^{t} \left[\binom{k_0}{i} \frac{t!}{(t-i)!} (l_1\alpha_1 + \ldots + l_n\alpha_n)^{k_0-i} U_{\bar{l}}^{10K_1}(\bar{x}) \right.$$
$$\left. \times G_{t-i,k_1,K_1-k_1}(T_{\bar{l}}(\bar{x})/U_{\bar{l}}(\bar{x}), S_{\bar{l}}(\bar{x})/U_{\bar{l}}(\bar{x}))\right].$$

Оскільки $\delta_{\bar{u}} R_{s,\bar{l}}(\bar{x}) \in {}^a\mathfrak{p}$, то $Q_{s,\bar{l}}(\bar{x}) \in \mathfrak{p}$ і з Леми 2.2 отримаємо оцінку

$$|Q_{s,\bar{l}}(\bar{\omega})| < \exp\left(-\frac{2}{3}\lambda D^k M \ln M\right).$$

З цієї оцінки випливає оцінка Леми 2.6.

Позначимо

$$G(z) = \sigma^{K_1}((z + iK')/\sqrt{e_1 - e_3})F(z).$$

З властивостей $\mathrm{sn}(z)$ та Леми 1.7, Леми 1.8, (11) і (12) отримаємо наступне твердження.

Лема 2.7. *У крузі $|z| \leqslant \lambda^{2n+2}D^{1/2}$ справджується*

$$|G(z)| \leqslant \exp\left(-\frac{3}{8}\lambda D^k M \ln M\right).$$

Застосувавши Леми 1.5–1.7, Лему 2.1, Лему 2.4, Лему 2.5 та Лему 2.7, отримаємо таке твердження.

Лема 2.8. *Для усіх цілих чисел s, $l_1, \ldots, l_n$ таких, що $0 \leqslant s \leqslant S$, $0 \leqslant l_j \leqslant \lambda^{4k+1}D^{1/2}$, і $\mathfrak{M}$-допустимої точки $l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n$ справджується*

$$|F^{(s)}(l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n)| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3}\lambda D^k M \ln M\right).$$

Усі наведені вище міркування справджуються при $1 \leqslant r \leqslant n/2$, тому $k \geqslant n/2$.

Позначимо $\mathcal{R}$ — факторкільце $\mathbb{K}[\bar{x}]/{}^a\mathfrak{p}$, η_i — образи x_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$, $\mathcal{L}$ — поле часток $\mathcal{R}$. Згідно Леми 2.3, $U_{\bar{l}}(\bar{\eta}) \notin \mathfrak{p}$. Визначимо $\bar{\xi}_{\bar{l}} = (\bar{\xi}_{\bar{l},1}, \bar{\xi}_{\bar{l},2}, \bar{\xi}_{\bar{l},3})$ так:

$$\bar{\xi}_{\bar{l}} = (l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n,\ T_{\bar{l}}(\bar{\eta})/U_{\bar{l}}(\bar{\eta}),\ S_{\bar{l}}(\bar{\eta})/U_{\bar{l}}(\bar{\eta}))),\quad \bar{\xi}_{\bar{l}} \in \mathcal{L}^3.$$

Оскільки точки $(\mathrm{sn}(l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n), \mathrm{sn}'(l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n)), \bar{l} = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\bar{l} \neq 0$, лежать на кривій $y^2 = (1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)$, то

$$U_{\bar{l}}^2(\bar{\omega})S_{\bar{l}}^2(\bar{\omega}) = (U_{\bar{l}}^2(\bar{\omega}) - T_{\bar{l}}^2(\bar{\omega}))(U_{\bar{l}}^2(\bar{\omega}) - \varkappa^2 T_{\bar{l}}^2(\bar{\omega})).$$

Звідси та з Леми 2.5 випливає, що дві останні координати точки $\bar{\xi}_{\bar{l}}$ задовольняють рівняння $\xi_{\bar{l},3}^2 = (1 - \xi_{\bar{l},2}^2)(1 - \varkappa^2 \xi_{\bar{l},2}^2)$.

Лема 2.9. *Нехай $\bar{\xi}_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3})$, $1 \leqslant i \leqslant m$, — точки з різними першими координатами, $R \in \mathcal{L}[z, x]$, $\deg_z R \leqslant K_0$, $\deg_x R \leqslant K_1$. Тоді*

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{ord}_{\bar{\xi}_i} R \leqslant (4K_1 + 2)K_0 + 2mK_1.$$

Доведення Леми 2.9 аналогічне до доведення Леми 16 з [8].

Нехай

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial x} + (2\varkappa^2 x^3 - (1 + \varkappa^2)x)\frac{\partial}{\partial y}$$

— диференціальний оператор в кільці $\mathcal{L}[z, x, y]$. Застосовуючи Лему 1.5 і Лему 2.8, отримаємо наступне твердження.

Лема 2.10. *Для цілих s, $l_1, \ldots, l_n$, $0 \leqslant s \leqslant S$, $0 \leqslant l_j \leqslant \lambda^{4k+1}D^{1/2}$, таких, що точка $l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n$ $\mathfrak{M}$-допустима, виконується $D^s F(z)|_{l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n} = 0$.*

Тепер для доведення Теореми 2 достатньо показати суперечність оцінок в Лемі 2.9 і Лемі 2.10. Для многочлена F, побудованого в Лемі 2.6, згідно Леми 2.10 отримаємо

$$\sum \mathrm{ord}_{\bar{\xi}_i} F \geqslant \frac{1}{2}\lambda^{n+1}D^{n/2}M,$$

що суперечить Лемі 2.9. Отримане протиріччя доводить Лему 2.1, а, отже, й Теорему 2.

References

[1] Chudnovsky G.V. *Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann-Weierschtrass theorem.* Inventiones Math. 1980, **61**, 267–290.

[2] Fel'dman N.I., Nesterenko Yu.V. Transcendental Numbers. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] Hurwitz A., Courant R. Allgemeine Funktionentheorie und elliptishe funktionen. Springer, Berlin, 1964.

[4] Kholyavka Ya.M. *On a measure of algebraic independence of values of Jacobi elliptic functions.* Fundamental and Applied Mathematics 2005, **11** (6), 209–219.

[5] Masser D. Elliptic functions and transcendence. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[6] Masser D.W., Wüstholz G. *Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions.* Inventiones Math. 1983, **72**, 407–464.

[7] Nesterenko Yu.V. *On a measure of the algebraic independence of the values of Ramanujan functions.* Proc. V.A. Steklov Inst. Math. 1997, **218**, 299–334. (in Russian)

[8] Nesterenko Yu.V. *On a measure of algebraic independence of values of an elliptic function.* Izvestiya RAN: Ser. Mat. 1995, **59** (4), 155–178. (in Russian)

[9] Nesterenko Yu.V. *On the measure of algebraic independence of the values of an elliptic function at algebraic points.* Usp. Mat. Nauk 1985, **40** (4), 221–222. (in Russian)

[10] Nesterenko Yu.V. *On a measure of the algebraic independence of the values of certain functions*. Mat. Sb. 1985, **128** (170, 4), 545–568. (in Russian)

[11] Nesterenko Yu.V. *Transcendence degree of some fields generated by values of the exponential function*. Mat. Zametki 1989, **46** (3), 40–49. (in Russian)

[12] Nesterenko Yu.V. *On algebraic independence of algebraic powers of algebraic numbers*. Mat. Sb. 1984, **123** (165, 4), 435–459. (in Russian)

[13] Nesterenko Yu.V. *Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and applications in the theory of transcendental numbers*. Izv. Acad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. 1977, **41** (2), 253–284. (in Russian)

[14] Nesterenko Yu.V. *Estimates for the characteristic function of a prime ideal*. Mat. Sb. 1984, **123** (165, 1), 11–34. (in Russian)

[15] Nesterenko Yu. On a measure of algebraic independence of the values of elliptic functions. In: P. Philippon (Ed.) Diophantine Approximations and Transcendental Numbers: Proceedings of the Colloquium C.I.R.M. Lumini, 1990. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992, 239–248.

[16] Philippon P. *Varietes abeliennes et independance algebrique*. Inventiones Math. 1983, **72**, 389–405.

[17] Ramachandra K. *Contributions to the theory of transcendental numbers. II*. Acta Arithmetica 1968, **14**, 73–88.

[18] Reyssat E. *Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp*. Bull. Soc. Math. France 1980, **1**, 47–79.

[19] Shidlovskij A.B. Diophantine approximations and transcendental numbers. Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1982. (in Russian)

[20] Shidlovskij A.B. Transcendental Numbers. Walter de Grueter, Berlin, 1989.

[21] Wüstholz G. *Über das abelsche Analogon des Lindemannschen Satzes*. Inventiones Math. 1983, **72**, 363–388.

[22] Zariski O., Samuel P. Commutative Algebra, Vol.1&2. Springer, New-York, 1958.

Надійшло 01.11.2012

Kholyavka Ya.M. *On a measure of algebraic independence of modulus and values of Jacobi elliptic function*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 134–142.

It is proved an estimation of a measure of algebraic independence for the modulus and values at various algebraic points of the Jacobi elliptic function.

Key words and phrases: measure of algebraic independence, Jacobi elliptic function.

Холявка Я.М. *О мере алгебраической независимости модуля и значений эллиптической функции Якоби* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — C. 134–142.

Доказывается оценка меры алгебраической независимости модуля и значений в различных алгебраических точках эллиптической функции Якоби.

Ключевые слова и фразы: мера алгебраической независимости, эллиптическая функция Якоби.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 515.12+512.58

Черковський Т.М.

СУПЕРКОМПАКТНІСТЬ ПРОСТОРІВ ЄМНОСТЕЙ ТА ЇЇ НАСЛІДКИ

Черковський Т.М. *Суперкомпактність просторів ємностей та її наслідки* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — C. 143–149.

Доведено, що простір нормованих дійснозначних ємностей на відкрито-породженому компакті є абсолютним ретрактом. Показано, що у просторі нормованих граткозначних ємностей існує нормальна бінарна передбаза для замкнених множин, звідки випливає, що цей простір є простором Дугунджі.

Ключові слова і фрази: суперкомпактність, ємність, простір Дугунджі, абсолютний ретракт.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна
E-mail: tymofiy.cher@gmail.com

1 Вступ

Простір X називається *суперкомпактним* [6], якщо він має бінарну передбазу для замкнених множин. Сім'я $\mathcal{P}$ замкнених підмножин X є *бінарною*, якщо будь-яка зчеплена підсім'я із $\mathcal{P}$ має непорожній перетин (система підмножин X є *зчепленою*, якщо кожні два елементи цієї системи перетинаються). Передбаза $\mathcal{P}$ називається *нормальною*, якщо для кожних $S_0, S_1 \in \mathcal{P}$ із $S_0 \cap S_1 = \varnothing$ існують такі $T_0, T_1 \in \mathcal{P}$, що

$$S_0 \cap T_0 = \varnothing = T_1 \cap S_1 \quad \text{та} \quad T_0 \cup T_1 = MX.$$

Простір X, який має бінарну нормальну передбазу $\mathcal{P}$, називається нормальним *суперкомпактним*.

Для X *суперрозширення* λX складається із всіх максимальних зчеплених систем замкнених підмножин в X. Сім'я множин $U^+ = \{\eta \in \lambda X \mid F \subset U$ для деякої $F \in \eta\}$, де U пробігає всі відкриті підмножини X, є передбазою для топології в λX.

Компактний простір X називається *відкрито-породженим* [4, 1], якщо X є граничним простором зворотнього σ-спектра, в якому всі проекції є відкритими відображеннями з метризовними ядрами. Поняття обернених спектрів, систематичне дослідження їх властивостей та представлення компактів незліченної ваги у вигляді зворотних спектрів можна знайти у [5].

Наступні твердження отримано В. Валовим [6].

Теорема 1. *[6, Proposition 3.2] Нехай X — відкрито-породжений компактний простір з бінарною передбазою $\mathcal{P}$ для замкнених множин. Тоді X є простором Дугунджі. Більше того, якщо X є зв'язним і $\mathcal{P}$ є нормальною, тоді X є абсолютним ретрактом.*

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Наслідок 1.1. *[6, Corollary 3.3] Якщо X є відкрито-породженим компактним простором, тоді λX є простором Дугунджі. Якщо при цьому X є зв'язним, тоді простір максимальних зчеплених систем λX є абсолютним ретрактом.*

Нормованою неадитивною мірою [7] (нормованою ємністю) на компактному гаусдорфовому просторі X називаємо функцію $c : \mathrm{Exp}X \cup \varnothing \to I$ з такими трьома властивостями (нижче F, G – замкнені підмножини в X):

1. $c(\varnothing) = 0, c(X) = 1$;
2. якщо $F \subset G$, то $c(F) \leq c(G)$ *(монотонність)*;
3. якщо $c(F) \leq a$, то існує така відкрита множина $U \supset F$, що для кожної множини $G \subset U$ виконується $c(G) < a$ *(напівнеперервність згори)*.

Нехай L — компактна гаусдорфова топологічна гратка. Функція $c :$ Exp $X \to L$ називається *нормованою L-значною ємністю* [3] (нормованою граткозначною ємністю) на компактному просторі L, якщо виконано наступні умови:

1. $c(\varnothing) = 0, c(X) = 1$;
2. для кожних замкнених підмножин F, G простору X із включення $F \subset G$ випливає $c(F) \leq c(G)$ *(монотонність)*;
3. якщо $F \subset X$ замкнена і $c(F)$ міститься в околі $V \subset L$, то існує така відкрита множина $U \supset F$, що $c(G) \in V \downarrow$ для будь-якої замкненої множини $G \subset X$ для якої $G \subset U$ *(напівнеперервність згори)*.

У нашій статті L — цілком дистрибутивна гратка, тоді з топологією Лоусона вона є компактною гаусдорфовою дистрибутивною граткою Лоусона (див. [2] щодо основ теорії неперервних топологічних граток).

Надалі всі ємності вважаємо нормованими. На множинах MX дійснозначних ємностей та $M_L X$ граткозначних ємностей на компакті X розглядаємо тісні топології [7, 3], які теж виявляються компактними і гаусдорфовими.

Нашою метою є отримання для MX та $M_L X$ аналогів згаданих вище теорем В. Валова про простір λX.

2 Суперкомпактність та нормальна суперкомпактність просторів дійснозначних мір

Оскільки отримані В. Валовим доведення суттєво спираються на суперкомпактність λX, перевіримо, чи простір неадитивних мір MX є суперкомпактним. Для цього потрібно перевірити, чи в ньому існує бінарна передбаза для замкнених множин. Передбазу топології на MX утворюють множини вигляду $O_-(F,a) = \{c \in MX \mid c(F) < a\}$, де $F \underset{cl}{\subset} X, a \in \mathbb{R}$, і

$$O_+(U,a) = \{c \in MX \mid c(U) > a\} = \{c \in MX \mid \exists F \underset{cl}{\subset} U, c(F) > a\},$$

де $U \underset{op}{\subset} X, a \in \mathbb{R}$.

Таким чином, множини

$$\bar{O}_-(F,a) = MX \backslash O_-(F,a) = \{c \in MX \mid c(F) \geq a\},$$

де $F \underset{cl}{\subset} X, a \in \mathbb{R}$, та

$$\bar{O}_+(U,a) = MX \backslash O_+(U,a) = \{c \in MX \mid c(U) \leq a\} = \{c \in MX \mid \exists F \underset{cl}{\subset} U, c(F) \leq a\},$$

де $U \underset{op}{\subset} X, a \in \mathbb{R}$, є замкненими в MX і утворюють передбазу $\mathcal{P}$ для замкнених множин.

Теорема 2. *Передбаза $\mathcal{P}$ у MX є бінарною і нормальною.*

Доведення. Зрозуміло, що для будь-яких $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ та $U_1, U_2 \underset{op}{\subset} MX$ виконано $\bar{O}_+(U_1,a_1) \cap \bar{O}_+(U_1,a_2) \neq \varnothing$. Аналогічно для будь-яких $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ і $F_1, F_2 \underset{cl}{\subset} MX$ перетин $\bar{O}_-(F_1,a_1) \cap \bar{O}_-(F_1,a_2)$ є непорожнім. Розглянемо $\bar{O}_-(F,b)$ і $\bar{O}_+(U,a)$ та перевіримо, при яких умовах $\bar{O}_-(F,b) \cap \bar{O}_+(U,a) = \varnothing$. Якщо $\bar{O}_-(F,b) \cap \bar{O}_+(U,a) = \varnothing$, то

$$\{c \in MX \mid c(F) \geq b\} \cap \{c \in MX \mid c(U) \leq a\} = \varnothing,$$

а це можливо тоді і тільки тоді, коли $F \subset U$ та $a < b$ одночасно.

Якщо F не є підмножиною U, тоді існує $c_0(A) \in \bar{O}_-(F,a) \cap \bar{O}_+(U,a)$:

$$c_0(A) = \begin{cases} 1, & \text{при } A = X; \\ a, & \text{при } A \neq X, A \supset F; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Нехай $a \geq b$, тоді

$$c_0(A) = \begin{cases} 1, & \text{при } A = X; \\ b, & \text{при } A \neq X, A \neq \varnothing; \\ 0, & A = \varnothing. \end{cases}$$

Тепер розглянемо сукупність множин

$$\bar{O}_-(F_1,b_1), \bar{O}_-(F_2,b_2), \ldots, \bar{O}_-(F_n,b_n) \quad \text{і} \quad \bar{O}_+(U_1,a_1), \bar{O}_+(U_2,a_2), \ldots, \bar{O}_+(U_m,a_m),$$

де $n, m \in \mathbb{R}$, та доведемо, що коли кожні дві із них мають непорожній перетин, то і вся сукупність має непорожній перетин. Зрозуміло, що $\bigcap\limits_{k=1}^{m} \bar{O}_+(U_k,a_k) \neq \varnothing$ та $\bigcap\limits_{l=1}^{n} \bar{O}_-(F_l,b_l) \neq \varnothing$. Якщо для кожних i,j виконується $\bar{O}_+(U_i,a_i) \cap \bar{O}_-(F_j,b_j) \neq \varnothing$, то або F_j не є підмножиною U_i або $a_i \geq b_j$. Такий перетин є непорожнім, оскільки до нього належить наступна ємність $c_0(A) \in MX$:

$$c_0(A) = \begin{cases} 1, & \text{при } A = X, \\ \max\{b_i \mid A \supset F_i\}, & A \neq X, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Якщо $F_j \supset F_i$, то $\{i \mid F_j \supset F_i\} \ni j$, тому для $c_0(F_j)$ маємо $\{b_i \mid F_j \supset F_i\} \ni b_j$, а, отже, $\max\{b_i \mid F_J \supset F_i\} \geq b_j$, і маємо $c(F_j) \geq b_j$. Отже, $c_0 \in \bar{O}_-(F_j,b_j)$. Також легко бачити, що $c_0 \in \bar{O}_+(U_i,a_i)$, тобто $c_0(U_i) \leq a_i$. Припустимо протилежне, тоді $c_0(U_i) > a_i$, а тому для деякого $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ маємо $F_j \subset U_i$ і $b_j > a_i$ одночасно, а це неможливо, оскільки за умовою $\bar{O}_+(U_i,a_i) \cap \bar{O}_-(F_j,b_j) \neq \varnothing$, тому або F_j не є підмножиною U_i, або $b_j < a_i$.

Отже, в MX існує бінарна передбаза для замкнених множин, а тому MX *є суперкомпактним простором.*

Дана бінарна передбаза $\mathcal{P}$ є нормальною, тобто для кожних неперетинних $S_0, S_1 \in \mathcal{P}$, існують такі $T_0, T_1 \in \mathcal{P}$, що

$$S_0 \cap T_0 = \varnothing = T_1 \cap S_1 \quad \text{та} \quad T_0 \cup T_1 = MX.$$

Нехай

$$S_0 = \bar{O}_+(U,a) = \{c \in MX \mid c(U) \le a\}, \qquad S_1 = \bar{O}_-(F,b) = \{c \in MX \mid c(F) \ge b\}.$$

Бачимо, що, коли $b > a$ та $F \subset U$, то $S_0 \cap S_1 = \varnothing$. Оскільки $F \subset U$, то існує така множина V, що $F \subset V \subset \mathrm{Cl}V \subset U$. Тоді T_0 і T_1 можна підібрати наступним чином:

$$T_0 = \bar{O}_-(\mathrm{Cl}V,d) = \{c \in MX \mid c(\mathrm{Cl}V) \ge d\}, \qquad T_1 = \bar{O}_+(V,d) = \{c \in MX \mid c(V) \le d\},$$

де $d = \frac{a+b}{2}$. Тоді $S_0 \cap T_0 = \varnothing$, бо $\mathrm{Cl}V \subset U$, $d > a$; $S_1 \cap T_1 = \varnothing$, бо $F \subset V$, $b > d$. Нехай $c_1 \notin T_1 = \bar{O}_+(V,d)$, тобто нерівність $c_1(V) \le d$ не виконується. Тоді $c_1(V) > d$. Але, оскільки $T_0 = \{c \in MX \mid c(\mathrm{Cl}V) \ge d\}$, то $c_1 \in T_0$. Аналогічно, якщо $c_1 \notin T_0$, то $c_1 \in T_1$. Отже, $T_0 \cup T_1 = MX$.

Цим доведено, що передбаза $\mathcal{P}$ дійсно є бінарною і нормальною. □

Наслідок 2.1. *Якщо X є відкрито-породженим компактним простором, то MX є абсолютним ретрактом.*

У [7] введено функтор ємностей M та описано його основні властивості, з яких випливає, що MX є відкрито-породженим простором для відкрито-породженого X. Оскільки на MX існує бінарна передбаза $\mathcal{P}$ для замкнутих множин, то MX є простором Дугунджі, а, враховуючи його зв'язність і нормальність $\mathcal{P}$, — і абсолютним ретрактом.

3 Властивості просторів граткозначних ємностей

Розглянемо тепер простір M_LX граткозначних ємностей $c: \mathrm{Exp}\, X \to L$, де L — компактна гаусдорфова дистрибутивна гратка Лоусона. Побудуємо у M_LX бінарну передбазу для замкнених множин. Топологія на M_LX визначається передбазою, яка складається з усіх множин вигляду

$$O_-(F,V) = \{c \in M_LX \mid c(F) \le \alpha \text{ для деякого } \alpha \in V\} = \{c \in M_LX \mid c(F) \in V\downarrow\},$$

де $F \underset{cl}{\subset} X, V \underset{op}{\subset} L$, і

$$O_+(U,V) = \{c \in M_LX \mid c(F) \ge \alpha \text{ для деяких } F \underset{cl}{\subset} U, \alpha \in V\} = \{c \in M_LX \mid \exists F \underset{cl}{\subset} U, c(F) \in V\uparrow\},$$

де $U \underset{op}{\subset} X, V \underset{op}{\subset} L$.

Відповідно передбазу для замкнених множин в M_LX утворюють множини

$$\bar{O}_+(U,W_1) = M_LX \backslash O_+(U,V_1) = \{c \in M_LX \mid c(U) \in W_1\},$$

де $W_1 = W_1\downarrow = L\backslash V_1\uparrow, W_1 \underset{cl}{\subset} L, U \underset{op}{\subset} X, V_1 \underset{op}{\subset} L$, та

$$\bar{O}_-(F,W_2) = M_LX \backslash O_-(F,V_2) = \{c \in M_LX \mid c(F) \in W_2\},$$

де $W_2 = W_2\uparrow = L\backslash V_2\downarrow, W_2 \underset{cl}{\subset} L, F \underset{cl}{\subset} X, V_2 \underset{op}{\subset} L$.

Якщо покласти $W_1 = \{\alpha\}\downarrow, W_2 = \{\beta\}\uparrow, \forall \alpha,\beta \in L$, то множини

$$\bar{O}_+(U,\alpha) = \bar{O}_+(U,W_1) = \{c \in M_LX \mid c(U) \le \alpha,\ \alpha \in L\},$$

$$\bar{O}_-(F,\beta) = \bar{O}_+(U,W_2) = \{c \in M_LX \mid c(F) \ge \beta,\ \beta \in L\}$$

також утворюють передбазу $\mathcal{P}$ для замкнених множин в M_LX.

Теорема 3. *Передбаза $\mathcal{P}$ у M_LX є бінарною і нормальною.*

Доведення. Зрозуміло, що для будь-яких $\alpha_1, \alpha_2 \in L$ та $U_1, U_2 \underset{op}{\subset} M_LX$ виконано $\bar{O}_+(U_1,\alpha_1) \cap \bar{O}_+(U_2,\alpha_2) \ne \varnothing$. Аналогічно для будь-яких $\beta_1, \beta_2 \in L$ і $F_1, F_2 \underset{cl}{\subset} M_LX$ перетин $\bar{O}_-(F_1,\beta_1) \cap \bar{O}_-(F_1,\beta_2)$ є непорожнім. Розглянемо $\bar{O}_-(F,\beta)$ і $\bar{O}_+(U,\alpha)$. Якщо $\bar{O}_-(F,\beta) \cap \bar{O}_+(U,\alpha) = \varnothing$, то

$$\{c \in M_LX \mid c(F) \ge \beta\} \cap \{c \in M_LX \mid c(U) \le \alpha\} = \varnothing,$$

а це можливо тоді і тільки тоді, коли одночасно $U \supset F$ та $\alpha \not\ge \beta$. Якщо F не є підмножиною U, тоді існує міра $c_0(A) \in \bar{O}_-(F,\beta) \cap \bar{O}_+(U,\alpha)$ наступного вигляду:

$$c_0(A) = \begin{cases} 1, & \text{при } A = X; \\ \alpha, & \text{при } A \ne X, A \supset F; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Нехай $\alpha \ge \beta$, тоді

$$c_0(A) = \begin{cases} 1, & \text{при } A = X; \\ \beta, & \text{при } A \ne X, A \ne \varnothing; \\ 0, & A = \varnothing. \end{cases}$$

Тепер розглянемо сукупність множин

$$\bar{O}_-(F_1,\beta_1), \bar{O}_-(F_2,\beta_2), \dots, \bar{O}_-(F_n,\beta_n), \text{ і}$$

$$\bar{O}_+(U_1,\alpha_1), \bar{O}_+(U_2,\alpha_2), \dots, \bar{O}_+(U_m,\alpha_m), \text{ де } n, m \in \mathbb{R},$$

та доведемо, що коли кожні дві із них мають непорожній перетин, то і вся сукупність має непорожній перетин. Зрозуміло, що $\bigcap\limits_{k=1}^{m} \bar{O}_+(U_k,\alpha_k) \ne \varnothing$ та $\bigcap\limits_{l=1}^{n} \bar{O}_-(F_l,\beta_l) \ne \varnothing$. Якщо для всіх i, j виконується $\bar{O}_+(U_i,\alpha_i) \cap \bar{O}_-(F_j,\beta_j) \ne \varnothing$, то це означає, що або F_j не є підмножиною U_i, або $\alpha_i \ge \beta_j$. Такий перетин непорожній, до нього належить міра $c_0(A) \in M_LX$:

$$c_0(A) = \begin{cases} 1, & \text{при } A = X, \\ \sup\{\beta_j \mid A \supset F_i\}, & A \ne X, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покажемо, що $c_0 \in \bar{O}_-(F_j,\beta_j)$. Якщо $F_j \supset F_i$, то $\{i \mid F_j \supset F_i\} \ni j$, тому для $c_0(F_j)$ $\{\beta_i \mid F_j \supset F_i\} \ni \beta_j$, а, отже, $\sup\{\beta_i \mid F_j \supset F_i\} \ge \beta_j$, і маємо $c(F_j) \ge \beta_j$. Також легко бачити, що $c_0 \in \bar{O}_+(U_i, \alpha_i)$, тобто $c_0(U_i) \leq \alpha_i$. Припустимо протилежне, тоді $c_0(U_i) > \alpha_i$, а тому для деякого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ маємо $F_j \subset U_i$ і $\alpha_i \not\geq \beta_j$ одночасно, а це неможливо, оскільки за умовою $\bar{O}_+(U_i, \alpha_i) \cap \bar{O}_-(F_j, \beta_j) \neq \varnothing$, тому або F_j не є підмножиною U_i, або $\beta_j \leq \alpha_i$. Отже, в $M_L X$ існує бінарна передбаза для замкнених множин, а тому $M_L X$ є *суперкомпактним простором*.

Тепер перевіримо, що дана передбаза $\mathcal{P}$ для замкнених підмножин є нормальною. Нехай

$$S_0 = \bar{O}_+(U, \alpha) = \{c \in M_L X \mid c(U) \leq \alpha\},$$
$$S_1 = \bar{O}_-(F, \beta) = \{c \in M_L X \mid c(F) \geq \beta\}.$$

Якщо $F \subset U$ та $\alpha \not\geq \beta$ $\alpha, \beta \in L$, то $S_0 \cap S_1 = \varnothing$.

Із [2, Exercise IV-3.32] ми знаємо, що якщо L — цілком дистрибутивна гратка, то для кожних $\alpha \neq \beta$ існує відображення $\varphi : L \to I$, де $I = [0, 1]$, яке зберігає супремуми та інфімуми й відокремлює α та β. Це означає, що, якщо $\alpha \not\geq \beta$, то $\alpha \vee \beta \neq \alpha$, $\alpha \vee \beta \geq \beta$. Тоді $\varphi(\alpha \vee \beta) = \varphi(\alpha) \vee \varphi(\beta) \neq \varphi(\alpha)$, і $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$.

Виберемо таке $d \in I$, що $\varphi(\alpha) < d < \varphi(\beta)$. Нехай

$$\mathcal{A} = \{\alpha' \in L \mid \varphi(\alpha') \leq d\} \ni \alpha, \qquad \mathcal{B} = \{\beta' \in L \mid \varphi(\beta') \geq d\} \ni \beta.$$

Із властивостей функції φ випливає

$$\varphi(\sup \mathcal{A}) = \sup \varphi(\mathcal{A}) \leq d, \qquad \varphi(\inf \mathcal{B}) = \inf \varphi(\mathcal{B}) \geq d.$$

Нехай $\alpha_0 = \sup \mathcal{A}$, $\beta_0 = \inf \mathcal{B}$. Отримуємо нерівності: $\alpha_0 \geq \alpha$, $\beta_0 \leq \beta$. $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = L$, тому для $\forall \gamma \in L$ або $\gamma \leq \alpha_0$ або $\gamma \geq \beta_0$, та $\alpha_0 \not\geq \beta$, $\beta_0 \not\leq \alpha$. В X виберемо таку відкриту множину W, що $F \subset W \subset \bar{W} = \mathrm{Cl} W \subset U$.

Нехай $T_0 = \bar{O}_-(\bar{W}, \beta_0)$, $T_1 = \bar{O}_+(W, \alpha_0)$.

Маємо $S_0 \subset T_1$, оскільки, коли $c(U) \leq \alpha$ та $U \supset W$, то із монотонності міри отримуємо $c(W) \leq c(U) \leq \alpha$. Оскільки $\alpha \leq \alpha_0$, то $c(W) \leq \alpha_0$, а, отже, $\bar{O}_+(U, \alpha) \subset \bar{O}_+(W, \alpha_0)$. Аналогічно, якщо $c(F) \geq \beta$, то $c(\bar{W}) \geq c(F) \geq \beta \geq \beta_0$, а тому $\bar{O}_-(F, \alpha) \subset \bar{O}_-(\bar{W}, \beta_0)$, тобто $S_1 \subset T_0$.

Також $S_0 \cap T_0 = \varnothing$, оскільки $U \supset \bar{W}$ та $\alpha \not\geq \beta_0$. Так само отримуємо $S_1 \cap T_1 = \varnothing$, тому що $F \subset W$ та $\alpha_0 \not\geq \beta$.

Залишилося показати, що $T_0 \cup T_1 = M_L X$. Оскільки для кожного $\gamma \in L$ виконується або нерівність $\gamma \leq \alpha_0$, або $\gamma \geq \beta_0$, то, якщо $c(F) \notin \bar{O}_+(W, \alpha_0)$, тобто не виконується нерівність $c(W) \leq \alpha_0$, то $c(W) \geq \beta_0$. Маємо $\bar{W} \supset W$, тому $c(\bar{W}) \geq c(W) \geq \beta_0$, і, отже, $c \in \bar{O}_-(\bar{W}, \beta_0)$. Навпаки, якщо $c(F) \notin \bar{O}_-(\bar{W}, \beta_0)$, тобто нерівність $c(\bar{W}) \geq \beta_0$ не виконується, тоді $c(\bar{W}) \leq \alpha_0$. $\bar{W} \supset W$, тому $c(W) \leq c(\bar{W}) \leq \alpha$. Отже, $c \in \bar{O}_+(W, \alpha_0)$.

Ми довели, що передбаза $\mathcal{P}$ в $M_L X$ є бінарною нормальною. □

Отже, $M_L X$, як і MX, є *суперкомпактним простором*.

Наслідок 3.1. *Для відкрито-породженого X простір $M_L X$ є відкрито-породженим компактним простором з бінарною передбазою $\mathcal{P}$ для замкнених множин, тому є простором Дугунджі.*

Зауваження. *Як бачимо, залишилось нез'ясованим питання, у яких випадках простір $M_L X$ є абсолютним ретрактом: a) для даних X, L; b) для даного X і всіх цілком дистрибутивних L; c) для даної L і всіх зв'язних X. Це стане темою наступної публікації.*

REFERENCES

[1] Fedorchuk V.V., Filippov V.V. General topology: fundamental constructions. MGU Publ., Moscow, 1988. (in Russian)

[2] Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M., Scott D.S. Continuous Lattices and Domains. In: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 93. Cambridge University Press, 2003.

[3] Nykyforchyn O.R. *Capacities with values in compact Hausdorff lattices.* Applied Categorical Structures 2011, **15** (3), 243–257. doi: 10.1007/s10485-007-9061-z

[4] Shchepin E.V. *Functors and uncountable powers of compacta.* Russian Mathematical Surveys 1981, **36** (3), 1–71. doi: 10.1070/RM1981v036n03ABEH004247

[5] Shchepin E.V. *Method of inverse spectra in topology of bicompacts.* Mathematical Notes 1982, **31** (2), 154–162. doi: 10.1007/BF01158138

[6] Valov V. *Extenders and $\varkappa$-Metrizable Compacta.* Mathematical Notes 2011, **89** (3), 319–327. doi: 10.4213/mzm9052

[7] Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R. *Capacity functor in the category of compacta.* Sbornik: Mathematics 2008, **199** (2), 159–184. doi: 10.4213/sm1504

Надійшло 25.12.2012

Cherkovskyi T.M. *Supercompactness of spaces of capacities and its consequences.* Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 143–149.

It is proved that the space of normalized real-valued capacities on an openly generated compactum is an absolute retract. Existence of a normal binary subbase for closed subsets in the space of normalized lattice-valued capacities on an openly generated compactum is also shown, which implies that this space is a Dugundji space.

Key words and phrases: supercompactness, capacity, Dugundji space, absolute retract.

Черковский Т.М. *Суперкомпактность пространств емкостей и ее следствия* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 143–149.

Доказано, что пространство нормированных действительнозначных емкостей на открыто-порожденном компакте является абсолютным ретрактом. Показано, что в пространстве нормированных решеткозначных емкостей существует нормальная бинарная предбаза для замкнутых множеств, откуда следует, что это пространство является пространством Дугунджи.

Ключевые слова и фразы: суперкомпактность, емкость, пространство Дугунджи, абсолютный ретракт.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 519.6

Шахно С.М., Ярмола Г.П.

ДВОКРОКОВИЙ МЕТОД ТИПУ ХОРД З АПРОКСИМАЦІЄЮ ОБЕРНЕНОГО ОПЕРАТОРА

Шахно С.М., Ярмола Г.П. *Двокроковий метод типу хорд з апроксимацією оберненого оператора* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 150–155.

Запропоновано двокроковий метод типу хорд з послідовною апроксимацією оберненого оператора для розв'язування нелінійних рівнянь. Досліджено локальну збіжність методу та встановлено квадратичний порядок збіжності. На тестових задачах проведено числовий експеримент.

Ключові слова і фрази: апроксимація оберненого оператора, метод типу хорд, порядок збіжності.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
E-mail: s_shakhno@franko.lviv.ua (Шахно С.М.), halina_yarmola@ukr.net (Ярмола Г.П.)

Вступ

Нехай потрібно знайти наближений розв'язок x_* нелінійного рівняння

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

де оператор F визначений на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями у банаховому просторі Y. Для розв'язування рівняння (1) існує багато методів. Зокрема, метод Ньютона, Стеффенсена, різницеві методи [1, 4, 8]. При цьому на кожному ітераційному кроці потрібно знаходити обернений оператор (розв'язувати лінійне операторне рівняння). Оскільки це завдання є складним, тому можна застосовувати методи з апроксимацією оберненого оператора, які не потребують розв'язування лінійних задач.

Існує два підходи до апроксимації оберненого оператора: послідовна та паралельна (синхронна та асинхронна). Методи з паралельною апроксимацією оберненого оператора застосовують при чисельному розв'язуванні (1) на процесорах, що працюють паралельно. Методи з апроксимацією оберненого оператора складаються з двох гілок. Одна з них призначена для побудови наближень до розв'язку нелінійного рівняння (1), а інша — для апроксимації оберненого оператора.

Методи з послідовною апроксимацією оберненого оператора досліджували багато авторів. У [5] вивчено локальну збіжність модифікацій методів Ньютона та Стеффенсена. Дослідження однопараметричного класу методів типу Ньютона та метод типу Стеффенсена з послідовною апроксимацією оберненого оператора проведено у [3]. Обґрунтуванню збіжності методів з послідовною апроксимацією оберненого оператора присвячені також праці [6, 7].

2010 *Mathematics Subject Classification:* 65J15, 65H10.

Для розв'язування (1) ми пропонуємо двокроковий ітераційний процес

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - A_nF(x_n), \quad y_{n+1} = x_{n+1} - A_nF(x_{n+1}), \\ A_{n+1} &= A_n[2I - F(u_{n+1}, v_{n+1})A_n], \quad n = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

де x_0 і A_0 — початкові наближення до розв'язку x_* і до оператора $A_* = [F'(x_*)]^{-1}$ відповідно, I — одиничний оператор, $F(u,v)$ — поділена різниця першого порядку оператора F за точками u і v, $u_n = x_n + a_n(y_n - x_n)$, $v_n = x_n + b_n(y_n - x_n)$, $a_n \in [-1;1]$, $b_n \in [0;1]$. Цей метод побудований на базі двокрокового методу

$$x_{n+1} = x_n - [F(u_n, v_n)]^{-1}F(x_n), \quad y_{n+1} = x_{n+1} - [F(u_n, v_n)]^{-1}F(x_{n+1}), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

запропонованого у [4]. Зауважимо, що частковим випадком методу (2) при значеннях параметрів $a_n = 0$ і $b_n = 0$ є метод, запропонований С.Ю. Ульмом у статті [5].

У цій праці показано результати теоретичного аналізу збіжності та числового дослідження ітераційного процесу (2).

1 Локальна збіжність методу з послідовною апроксимацією оберненого оператора

Означення 1. *Обмежений лінійний оператор, який діє з X в Y, позначуваний $F(x,y)$, будемо називати поділеною різницею першого порядку для оператора F за фіксованими точками x і y ($x \neq y$), якщо виконується рівність $F(x,y)(x-y) = F(x) - F(y)$.*

У випадку, коли $x = y$ вважатимемо, що $F(x,x) = F'(x)$, де $F'(x)$ — похідна Фреше нелінійного оператора F у точці x.

Наступна теорема встановлює умови, при яких ітераційний процес (2) є збіжним. У доведенні теореми використовуються ідеї, викладені у роботі [5].

Теорема 1. *Нехай F — нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Припустимо, що:*

1) рівняння (1) має розв'язок $x_* \in D$, існує похідна Фреше $F'(x_*)$ і вона оборотна;

2) в кулі $U = \{x : \|x - x_*\| \le r_0\}$ функція $F(x)$ має поділені різниці першого порядку $F(x,y)$, які задовольняють умову Ліпшиця:

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \le L(\|x-u\| + \|y-v\|); \tag{4}$$

3) $\|F'(x_*)\| \le C$, $\|[F'(x_*)]^{-1}\| \le B$,

4) $h_0 = \max\{K_0,\ M_0r_0,\ N_0\} < \dfrac{1}{r_0}$, де

$$K_0 = C + L(B + r_0),\ M_0 = [C + L(B+r_0)K_0r_0]K_0,\ N_0 = [C + (2+a)L(B+r_0)^2K_0],$$
$$a = \begin{cases} 0, & a_n \ge 0, \\ 2, & a_n < 0, \end{cases} \quad r_0 = \max\{\|x_0 - x_*\|, \|y_0 - x_*\|, \|A_0 - A_*\|\}.$$

Тоді послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{A_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ збігаються відповідно до x_*, A_*, причому справджується оцінка

$$r_n = \max\{\|x_n - x_*\|, \|y_n - x_*\|, \|A_n - A_*\|\} \le (h_0r_0)^{2^n-1}r_0, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{5}$$

Доведення. Враховуючи (2), маємо

$$x_{n+1} - x_* = x_n - x_* - A_n[F(x_n) - F(x_*)] = [I - A_nF(x_n, x_*)](x_n - x_*),$$
$$y_{n+1} - x_* = x_{n+1} - x_* - A_n[F(x_{n+1}) - F(x_*)] = [I - A_nF(x_{n+1}, x_*)](x_{n+1} - x_*).$$

Оскільки виконується $I - A_nF(x_n, x_*) = A_*F'(x_*) - A_nF'(x_*) + A_nF'(x_*) - A_nF(x_n, x_*) = (A_* - A_n)F'(x_*) + A_n(F'(x_*) - F(x_n, x_*))$ і $\|A_n\| \le \|A_*\| + \|A_n - A_*\| \le B + \|A_n - A_*\|$, то, використовуючи умову 3) теореми, отримаємо

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_*\| &\le [C\|A_n - A_*\| + L(B + \|A_n - A_*\|)\|x_n - x_*\|]\|x_n - x_*\|\\ &\le [C + L(B + r_0)]r_n^2 = K_0r_n^2,\end{aligned}$$
$$\|y_{n+1} - x_*\| \le [C\|A_n - A_*\| + L(B + \|A_n - A_*\|)\|x_{n+1} - x_*\|]\|x_{n+1} - x_*\|$$
$$\le [C\|A_n - A_*\| + L(B + \|A_n - A_*\|)K_0r_n^2]K_0r_n^2 \le [C + L(B + r_0)K_0r_0]K_0r_n^3 = M_0r_n^3.$$

З іншого боку

$$\begin{aligned}A_{n+1} - A_* =& A_n[2I - F(u_{n+1}, v_{n+1})A_n] - A_* = A_n[I + A_*F'(x_*) - F(u_{n+1}, v_{n+1})A_n] - A_*\\ =& A_n[I + F'(x_*)A_* - F'(x_*)A_n + F'(x_*)A_n - F(u_{n+1}, v_{n+1})A_n] - A_*\\ =& A_n[I + F'(x_*)(A_* - A_n) + (F'(x_*) - F(u_{n+1}, v_{n+1}))A_n] - A_*\\ =& [I - A_nF'(x_*)](A_n - A_*) + A_n(F'(x_*) - F(u_{n+1}, v_{n+1}))A_n\\ =& [A_* - A_n]F'(x_*)(A_n - A_*) + A_n(F'(x_*) - F(u_{n+1}, v_{n+1}))A_n.\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - x_*\| + \|v_{n+1} - x_*\| \le& (2 - a_{n+1} - b_{n+1})\|x_{n+1} - x_*\|\\ &+ (|a_{n+1}| + b_{n+1})\|y_{n+1} - x_*\| \le (2 + a)\|x_{n+1} - x_*\|,\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\|A_{n+1} - A_*\| \le& C\|A_n - A_*\|^2 + (B + \|A_n - A_*\|)^2L(\|u_{n+1} - x_*\| + \|v_{n+1} - x_*\|)\\ \le& C\|A_n - A_*\|^2 + (2 + a)L(B + \|A_n - A_*\|)^2\|x_{n+1} - x_*\|\\ \le& [C + (2 + a)L(B + r_0)^2K_0]r_n^2 = N_0r_n^2.\end{aligned}$$

Методом математичної індукції доведемо, що (5) виконується для всіх n. Поклавши $k = 1$, отримаємо

$$r_1 = \max\{\|x_1 - x_*\|, \|y_1 - x_*\|, \|A_1 - A_*\|\} \le h_0r_0^2 = (h_0r_0)^{2^1-1}r_0.$$

Припустимо, що оцінка (5) виконується для $k = \overline{1, n-1}$. Тоді для $k = n$ матимемо

$$r_n = \max\{\|x_n - x_*\|, \|y_n - x_*\|, \|A_n - A_*\|\} \le h_0r_{n-1}^2 = h_0(h_0r_0)^{2^n-2}r_0^2 = (h_0r_0)^{2^n-1}r_0.$$

Оскільки

$$\|x_{n+1} - x_*\| \le K_0r_n\|x_n - x_*\|, \qquad \|y_{n+1} - x_*\| \le M_0r_n^2\|x_{n+1} - x_*\|,$$

то, враховуючи, що $r_n < r_0$ і $h_0r_0 < 1$, отримаємо

$$\|x_{n+1} - x_*\| < \|x_n - x_*\| < \ldots < \|x_0 - x_*\| \le r_0,$$
$$\|y_{n+1} - x_*\| < \|x_{n+1} - x_*\| < \ldots < \|x_0 - x_*\| \le r_0.$$

Отже, послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ належать кулі U. □

Зауваження 1. *З оцінки (5) випливає, що порядок збіжності ітераційного процесу (2) — квадратичний. При цьому припускається, що поділені різниці першого порядку задовольняють лише умову Ліпшиця.*

2 Числові експерименти

Практичне дослідження методу (2) проведено на тестових прикладах з [2, 5]. Ми застосовуємо двокроковий метод типу хорд з послідовною апроксимацією оберненого оператора для розв'язування систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь та нелінійних інтегральних рівнянь. Розрахунки проводяться при сталих значеннях параметрів a_n і b_n. Числові результати, отримані методом (2), порівнюються із результатами, отриманими методом (3).

Приклад 1. *Тридіагональна функція Бройдена*

$$\begin{aligned}&f^i = x^i(0.5x^i - 3) + 2x^{i+1} - 1, && i = 1,\\ &f^i = x^i(0.5x^i - 3) + x^{i-1} + 2x^{i+1} - 1, && 1 < i < m,\\ &f^i = x^i(0.5x^i - 3) + x^{i-1} - 1 && i = m,\\ &x_0^i = -1,\ i = \overline{1, m}.\end{aligned}$$

Приклад 2. *Тригонометрична система*

$$\begin{aligned}&k = div(i - 1, 5)\\ &f^i = 5 - (k + 1)(1 - \cos(x^i)) - \sin(x^i) - \sum_{j=5k+1}^{5k+5} \cos(x^j)\\ &x_0^i = 1/n, \qquad i = \overline{1, m}.\end{aligned}$$

Приклад 3. *Тригонометрично-експоненціальна функція*

$$\begin{aligned}f^i &= 3(x^i)^3 + 2x^{i+1} - 5 + \sin\left(x^i - x^{i+1}\right)\sin\left(x^i + x^{i+1}\right), && i = 1,\\ f^i &= 3(x^i)^3 + 2x^{i+1} - 5 + \sin\left(x^i - x^{i+1}\right)\sin\left(x^i + x^{i+1}\right)\\ &\quad + 4x^i - x^{i-1}\exp\left(x^{i-1} - x^i\right) - 3, && 1 < i < m,\\ f^i &= 4x^i - x^{i-1}\exp\left(x^{i-1} - x^i\right) - 3, && i = m,\\ x_0^i &= 2,\ i = \overline{1, m}.\end{aligned}$$

Приклад 4. *Нелінійне інтегральне рівняння*

$$\begin{aligned}&x(s) - \int_0^1 (1 - 0.4854s + s^2 + st\arctan(x))dt = 0,\ s, t \in [0, 1],\\ &x_0(i) = 1.5.\end{aligned}$$

Зупинка обчислювального процесу відбувалася за умови $\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \le \varepsilon$. Розрахунки проводилися для систем нелінійних рівнянь розмірності $m = 100$. Для методів (2) і (3) додаткове початкове наближення y_0 було обчислене за правилом: $y_0^i = x_0^i + 10^{-4}, i = \overline{1, m}$, і для методу (2) $A_0 = [F(u_0, v_0)]^{-1}$. Обчислення виконувалися з точністю $\varepsilon = 10^{-8}$ для прикладів 1 і 3, а для прикладу 2 — з точністю $\varepsilon = 10^{-10}$. У таблицях 1 – 3 наведено кількість ітерацій, необхідних для отримання наближеного розв'язку систем із прикладів 1 – 3 відповідно.

Як бачимо, швидкість збіжності методу (2) практично однакова при різних значеннях параметрів a_n і b_n. Серед диференціальних методів найшвидше збігаються методи з параметрами $a_n = 0.5$, $b_n = 0.5$ і $a_n = 1$, $b_n = 1$, а серед різницевих — методи з параметрами $a_n = 1$, $b_n = 0$ і $a_n = 1$, $b_n = 0.5$. За кількістю ітерацій, необхідних для знаходження

Метод (2)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	7	7	7	7	6
-0.5	7	7	7	6	6
0	7	7	6	6	6
0.5	7	6	6	6	6
1	6	6	6	6	6

Метод (3)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	5	5	5	5	5
-0.5	5	5	5	5	4
0	5	5	5	7	4
0.5	5	5	7	4	7
1	5	4	4	7	5

Табл. 1: Результати обчислень для прикладу 1 при $\varepsilon = 10^{-8}$

Метод (2)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	5	5	5	5	5
-0.5	5	5	5	5	5
0	5	5	5	5	5
0.5	5	5	5	5	5
1	5	5	5	5	5

Метод (3)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	5	5	5	5	4
-0.5	5	5	5	4	4
0	5	5	4	4	4
0.5	5	4	4	4	4
1	4	4	4	4	4

Табл. 2: Результати обчислень для прикладу 2 при $\varepsilon = 10^{-10}$

Метод (2)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	7	7	7	7	7
-0.5	7	7	7	7	7
0	7	7	7	7	6
0.5	7	7	7	6	6
1	7	7	6	6	6

Метод (3)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	6	6	6	6	6
-0.5	6	6	6	6	5
0	6	8	6	5	5
0.5	6	6	5	5	5
1	7	5	6	5	5

Табл. 3: Результати обчислень для прикладу 3 при $\varepsilon = 10^{-8}$

наближеного розв'язку системи рівнянь, запропонований нами метод з апроксимацією оберненого оператора (2) дещо поступається базовому методу (3). Проте його перевагою є те, що не потрібно розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному ітераційному кроці. Аналогічно, як у [5], ми порівнювали метод (2) з модифікацією методу (3), коли поділена різниця обчислюється лише один раз у точках u_0 і v_0. При цьому метод з послідовною апроксимацією оберненого оператора виявився ефективнішим.

n	$a = 0.5,\ b = 0.5$	$a = 0,\ b = 1$	$a = 1,\ b = -1$
1	2.008599938909832	2.008697259718701	2.007332718049135
2	1.999784032136865	1.999779182305491	1.999825757262160
3	2.000008159680034	2.000008346561328	2.000006697802527
4	2.000000866874908	2.000000859624378	2.000000921510420

Табл. 4: Результати обчислень для нелінійного інтегрального рівняння 4 при $\varepsilon = 10^{-5}$

Розв'язування нелінійного інтегрального рівняння методом (2) проводилось за схемою, запропонованою у [5]. Для наближеного обчислення інтегралів застосовували фор-

мулу трапецій з кроком $h = \dfrac{1}{m}$

$$\int_0^1 K(s,t,x(t))\,dt \approx \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}K\left(s,t_0,x^0\right) + \sum_{i=1}^{m-1} K\left(s,t_i,x^i\right) + \frac{1}{2}K\left(s,t_m,x^m\right)\right),$$

де $x^i \approx x(ih)$. Точний розв'язок інтегрального рівняння — $x_*(s) = 1 + s^2$. У таблиці 4 подано значення наближення до розв'язку у точці $s = 1$ на кожному ітераційному кроці. Результати наведено для модифікацій диференціального ($a = 0.5$, $b = 0.5$) та різницевого ($a = 0$, $b = 1$) методів з порядком $1 + \sqrt{2}$ і двокрокового методу Курчатова ($a = 1$, $b = -1$).

References

[1] Chen J., Shen Z. *Convergence analysis of the secant type method*. Appl. Math. Comp. 2007, **188**, 514–524.

[2] Lukšan L. *Inexact trust region method for large sparse systems of nonlinear equations*. J. of Optimization Theory and Appl. 1994, **81** (3), 385–387.

[3] Shakhno S.M. Difference and parametric iterative methods for solving nonlinear problems. Thesis of PhD dissertation. Kyiv, 2012. (in Ukrainian)

[4] Shakhno S.M., Grab S.I., Yarmola H.P. *Twoparametric secant type methods for solving nonlinear equations*. Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Computer Sci. 2009, **15**, 117–127. (in Ukrainian)

[5] Ulm S.Yu. *On iterative methods with successive approximation of the inverse operator*. Proc. of the Academy of Sci. of the Estonian SSR. Physics. Mathematics. 1967, **16** (4), 403–411. (in Russian)

[6] Vaarmann O. *On some iterative methods with successive approximation of the inverse operator. I*. Proc. of the Academy of Sci. of the Estonian SSR. Physics. Mathematics. 1968, **17** (4), 379–387. (in Russian)

[7] Vaarmann O. *On some iterative methods with successive approximation of the inverse operator. II*. Proc. of the Academy of Sci. of the Estonian SSR. Physics. Mathematics. 1969, **18** (1), 14–21. (in Russian)

[8] Wang X. *Convergence of Newton's method and uniquiness of the solution of equations in Banach space*. IMA J. of Numerical Analysis 2000, **20**, 123–134.

Надійшло 11.07.2012

Shakhno S.M., Yarmola H.P. *Two-step secant type method with approximation of the inverse operator*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 150–155.

The two-step secant type method with a consistent approximation of the inverse operator for solving nonlinear equations is proposed. The local convergence of the proposed method is studied and the quadratic convergence order is established. A numerical experiment is made on the test problems.

Key words and phrases: approximation of the inverse operator, secant type method, convergence order.

Шахно С.М., Ярмола Г.П. *Двухшаговый метод типа хорд с аппроксимацией обратного оператора* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 150–155.

Предложено двухшаговый метод типа хорд с последовательной аппроксимацией обратного оператора для решения нелинейных уравнений. Исследовано локальную сходимость предложенного метода и установлено квадратический порядок сходимости. На тестовых задачах проведено численный эксперимент.

Ключевые слова и фразы: аппроксимация обратного оператора, метод типа хорд, порядок сходимости.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

УДК 517.988.8

Шувар Б.А.[1], Обшта А.Ф.[1], Копач М.І.[2]

АГРЕГАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНІ АНАЛОГИ І УЗАГАЛЬНЕННЯ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИХ МЕТОДІВ

Шувар Б.А., Обшта А.Ф., Копач М.І. *Агрегаційно-ітеративні аналоги і узагальнення проекційно-ітеративних методів* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 156–163.

Для лінійних операторних рівнянь побудовані і досліджені агрегаційно-ітеративні алгоритми, які охоплюють способи ітеративного агрегування та проекційно-ітеративні методи. Умови збіжності не передбачають знакосталості відповідного оператора та не мають обмеження, щоб його спектральний радіус був меншим за одиницю.

Ключові слова і фрази: проекційно-ітеративні методи, декомпозиція, агрегаційно-ітеративні методи.

[1] Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
[2] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна
E-mail: obshta2002@gmail.com (Обшта А.Ф.), kopachm2009@gmail.com (Копач М.І.)

1 Вступ

Проекційно-ітеративні методи виникли під впливом дослідження методу усереднення функціональних поправок Ю.Д. Соколова [13]. Ці методи, теорія яких створена в [6], [5], поєднують ідеї проекційних і ітеративних методів, що дозволяє використовувати переваги кожного з них для розширення класів задач, до яких можна застосувати отримані синтетичні методи. Для рівняння вигляду

$$x = Ax + b \qquad (b \in E) \tag{1}$$

проекційно-ітеративні методи можна описати формулою

$$x^{(n+1)} = A_1 x^{(n+1)} + A_2 x^{(n)} + b. \tag{2}$$

Тут $A_1 + A_2 = A, A_1, A_2, A$ є лінійними неперервними операторами, які діють в банаховому просторі E і $b \in E$. Оператор A_1 означається за однією з формул $A_1 = AP, A_1 = PA, A_1 = PAP$, де P — оператор проектування простору E в його підпростір E_P. Позначимо через I тотожний оператор в E, $Q = I - P$. Очевидно, що $P^2 = P$. Відповідний проекційний метод

$$x^{(n+1)} = A_1 x^{(n+1)} + b \tag{3}$$

не використовує наближення $x^{(n)}$ при знаходженні $x^{(n+1)}$. При реалізації алгоритму (2) можна скористатися з банахового принципу стиску як засобу дослідження ітерацій та

2010 *Mathematics Subject Classification:* 47j25.

оцінки якості отриманих наближень. Такої переваги позбавлений алгоритм (3). В цій замітці пропонуємо спосіб побудови агрегаційно-ітеративних алгоритмів, які поєднують ідею алгоритму (2) з ідеєю ітеративного агрегування як засобу декомпозиції алгоритму (2) з використанням розпаралелення обчислювальних схем. Частковий алгоритм методу ітеративного агрегування досліджений в [3] за вельми жорстких обмежень щодо A та b і щодо параметрів, які фігурують в структурі алгоритму. Цей частковий випадок, відомий як однопараметричний метод ітеративного агрегування для рівняння (1), можна отримати як алгоритм вигляду

$$x^{(n+1)} = \frac{(\varphi, b)}{(\varphi, x^{(n)} - Ax^{(n)})} Ax^{(n)} + b, \tag{4}$$

де (φ, x) — значення лінійного функціоналу $\varphi \in E^*$ на елементах $x \in E$. Встановлені в [3] умови збіжності цього методу передбачають, що банахів простір E напівупорядкований за допомогою конуса K додатніх елементів і ця напівупорядкованість узгоджена з нормою в E (див., наприклад, [3, 4]). З-поміж основних припущень, які фігурують в [3], виокремимо вимоги про додатність A та b і функціоналу φ, а також умову, що спектральний радіус $\rho(A)$ оператора A менший від одиниці. Побудові синтезованих алгоритмів на основі методів ітеративного агрегування присвячені дослідження [11, 12, 2]. Будемо використовувати запропоновану в [8, 9, 10] методику побудови і дослідження агрегаційно-ітеративних методів, які охоплюють однопараметричні і багатопараметричні методи ітеративного агрегування. При цьому в отриманих умовах збіжності не фігурують вимоги про знакосталість A, b, φ та про нерівність $\rho(A) < 1$. Зазначимо, що вимоги про знакосталість A, b, φ фігурують у всіх відомих нам дослідженнях інших авторів щодо теорії і застосування методів ітеративного агрегування (див. наприклад, [1, 7, 14]).

2 Побудова агрегаційно-ітеративних алгоритмів

Задамо лінійні неперервні оператори $S : E \to E'$, $\Lambda : E' \to E'$, $\widetilde{A} : E \to E$ де E' — банахів простір, який, взагалі кажучи, не тотожний з E та E_P. Вимагатимемо, щоб справджувалася рівність

$$SAP = \Lambda S, \tag{5}$$

яку можна розглядати як частковий випадок загальнішого співвідношення

$$S(AP + \widetilde{A}) = \Lambda S. \tag{6}$$

Постулюємо існування оберненого оператора $(I' - \Lambda)^{-1}$, де I' — одиничний оператор в E'. Рівняння (1) запишемо у вигляді

$$x = APx + AQx + b \tag{7}$$

і розглядатимемо разом з ним додаткове рівняння

$$y = \Lambda y - SAQx - Sb. \tag{8}$$

Лема 2.1. *Якщо пара x^*, y^* є розв'язком системи рівнянь (7), (8), то при $x = x^*$, $y = y^*$ справджується рівність $Sx^* + y^* = \theta'$, де θ' — нульовий елемент в E'.*

Доведення. Рівності (7), (8) дають підставу для співвідношень

$$Sx^* + y^* = SAPx^* + SAQx^* + Sb + \Lambda y^* - SAQx^* - Sb.$$

Звідси, враховуючи умову (5), отримуємо рівність $Sx^* + y^* = \Lambda(Sx^* + y^*)$. Існування оператора $(I' - \Lambda)^{-1}$ дозволяє вважати лему доведеною. □

Означимо підпростір ε_0 простору $E \times E'$ як множину пар $\{x, y\}$ елементів $x \in E, y \in E'$, для яких маємо

$$\varepsilon_0 = \{\{x, y\} : Sx + y = \theta', x \in E, y \in E'\}. \quad (9)$$

Будемо розглядати алгоритм, побудований за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = APx + AQx^{(n)} + a^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \quad (10)$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n)} - SAQx^{(n)} + \alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) - Sb. \quad (11)$$

Тут $a^{(n)} : E' \to E$, $\alpha^{(n)} : E' \to E'$ задані лінійні неперервні оператори, для яких при кожному $n = 0, 1, \ldots$ справджується рівність

$$Sa^{(n)} + \alpha_0^{(n)} = \Lambda, \quad (12)$$

де $a^{(n)} = a(x^{(n)})$, $\alpha_0^{(n)} = \alpha_0(x^{(n)})$.

Лема 2.2. *Нехай справджуються рівності (12) і початкове наближення $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$ задовольняє співвідношення $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \varepsilon_0$. Тоді для $n = 0, 1, \ldots$ справджуються співвідношення $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \varepsilon_0$.*

Доведення. Використовуючи співвідношення (10), (11) та (5), знаходимо

$$Sx^{(n+1)} + y^{(n+1)} = SAPx^{(n)} + SAQx^{(n)} + Sa^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + Sb + \Lambda y^{(n)}$$
$$-SAQx^{(n)} + (Sa^{(n)} + \alpha_0^{(n)})y^{(n)} + (\Lambda - Sa^{(n)} - \alpha_0^{(n)})y^{(n+1)} - Sb = \Lambda(Sx^{(n)} + y^{(n)}).$$

Тому можна застосувати принцип індукції і на цій підставі вважати лему доведеною. □

Очевидним наслідком лем 2.1 та 2.2 є важливе для подальшого таке твердження.

Лема 2.3. *Нехай справджуються умови леми 2.2. Тоді для всіх $n = 0, 1, \ldots$ матимемо рівності*

$$S(x^{(n)} - x^*) + (y^{(n)} - y^*) = \theta'. \quad (13)$$

Доведення. Рівності (13) очевидним чином випливають з лем 2.1 та 2.2. □

В тому (взагалі кажучи, формально загальнішому) випадку, коли замість рівності (5) маємо рівність (6), допоміжне рівняння (8) замінимо рівнянням

$$y = \Lambda y - SAQx + S\widetilde{A}x - Sb. \quad (14)$$

Для системи (7), (14) зберігається твердження леми 2.1, а також зберігається означення підпростору ε_0 за допомогою співвідношення (9). В парі ітераційних формул (10), (11) формулу (11) замінимо формулою

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SAQx^{(n)} + S\widetilde{A}x^{(n)} + \alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) - Sb. \quad (15)$$

Для алгоритму (10), (15) зберігається твердження леми 2.2. Тому для цього випадку матимемо рівність (13), тобто справедливість твердження леми 2.3. Зазначимо при цьому, що в умовах лем 2.2 і 2.3 умову (12) постулюємо і для алгоритму (10), (15).

3 Збіжність ітерацій

За припущення, що при $n = 0, 1, \ldots$ існують оператори $(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}$, з рівностей (7), (8) та (10), (11) знаходимо

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} - y^* &= -(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}SAQ(x^{(n)} - x^*) + (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}\alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^*), \\ x^{(n+1)} - x^* &= (A + a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}SAQ(x^{(n)} - x^*)) \\ &\quad + a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(I' - \Lambda)(y^{(n)} - y^*). \end{aligned} \quad (16)$$

Задамо, взагалі кажучи, довільним способом лінійні неперервні оператори $\psi^{(n)} : E \to E'$, $\psi_0^{(n)} : E' \to E'$ $(n = 0, 1, \ldots)$ і використаємо рівності (13), (14), (15). Отримаємо

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} - y^* &= -(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(SAQ + \psi_0^{(n)}S)(x^{(n)} - x^*) \\ &\quad + (I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(\alpha_0^{(n)} - \psi_0^{(n)})(y^{(n)} - y^*), \\ x^{(n+1)} - x^* &= (A + a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(SAQ - \psi^{(n)}S)(x^{(n)} - x^*)) \\ &\quad + a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(I' - \Lambda - \psi^{(n)})(y^{(n)} - y^*). \end{aligned}$$

Позначимо

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(n)} & h_{11}^{(n)} \\ h_{21}^{(n)} & h_{22}^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} h_{11}^{(n)} &= A + a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(SAQ - \psi^{(n)}S), \\ h_{12}^{(n)} &= a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(I' - \Lambda - \psi^{(n)}), \\ h_{21}^{(n)} &= -(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(SAQ + \psi_0^{(n)}S), \\ h_{22}^{(n)} &= -(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}(\alpha_0^{(n)} - \psi_0^{(n)}). \end{aligned}$$

Приймемо для якої-небудь норми оператора $H^{(n)} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(n)} & h_{11}^{(n)} \\ h_{21}^{(n)} & h_{22}^{(n)} \end{pmatrix}$ в просторі $\widetilde{E} = E \times E'$ позначення $\|H^{(n)}\|_0$. Підсумовуючи наведені міркування, матимемо такий результат.

Теорема 1. *Якщо справджуються умови леми 2.3 і виконуються нерівності*

$$\|H^{(n)}\|_0 \le q < 1,$$

тоді послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ збігається до розв'язку $\{x^*, y^*\}$ системи (7), (8) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q. При цьому $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \varepsilon_0$ і $\{x^*, y^*\} \in \varepsilon_0$.

Нехай, зокрема,

$$\psi^{(n)} = I' - \Lambda. \quad (17)$$

У цьому випадку з теореми 1 випливає такий факт.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови леми 2.3 і оператори $\psi^{(n)}$ вибрані згідно з рівностями (17). Тоді для збіжності послідовності пар $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ до розв'язку $\{x^*, y^*\}$ системи (7), (8) достатньо, щоб виконувалось співвідношення*

$$\|A - a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}S(I - A)\| \le q < 1, \quad (18)$$

де $\|\cdot\|$ — *норма в E.*

Доведення. Умова (5) і припущення (17) дають підставу записати

$$\begin{aligned} SAQ - (I' - \Lambda)S =& SAQ - S + \Lambda S = SA(I-P) - S + \Lambda S \\ =& SA - SAP - S + \Lambda S = SA - \Lambda S - S + \Lambda S = -S(I-A). \end{aligned}$$

Тому замість рівності (16) матимемо

$$x^{(n+1)} - x^* = A - a^{(n)}(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)})^{-1}S(I-A)(x^{(n)} - x^*).$$

Звідси випливає, що збіжність за нормою до розв'язку рівняння (7) забезпечує умова (18). При цьому послідовності $x^{(n)}$ та $y^{(n)}$ збігаються до x^* та до y^* відповідно не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q. При всіх $n = 0, 1, \dots$ матимемо, що для пари $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ справджуються співвідношення $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \varepsilon_0$. □

Дослідження збіжності алгоритму (10), (15) можна звести до дослідження збіжності алгоритму (10), (11), маючи на увазі, що в (14) вираз $SAQx - A\widetilde{A}x$ можна формально замінити виразом $SAQx$. Це можна потрактувати як заміну оператора P іншим оператором проектування таким способом, що рівність (14) матиме вигляд (8), оправдуючи в такий спосіб заміну формули (15) формулою (11).

4 Приклад

Якщо E' є евклідовим простором E^N розмірності N, то алгоритми (10), (11) та (10), (15) є багатопараметричними агрегаційно-ітеративними методами. Зокрема, для алгоритму (10), (11) при $N = 1$ матимемо його однопараметричний варіант. Нехай $\lambda \neq 1$ є дійсним числом, φ є лінійним функціоналом у спряженому з E банаховому просторі E^*, (φ, x) є значеннями функціоналу φ на елементах $x \in E$. Будемо вважати, що оператори S та Λ означені за допомогою формул

$$Sx = (\varphi, x), \Lambda = \lambda.$$

Нехай $(AP)^*\varphi = \lambda I\varphi$ і, отже, $((AP)^*\varphi, x) = \lambda(\varphi, x)$, де $(AP)^*$ — спряжений оператор до AP. Алгоритм (10), (11) опишеться за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = APx^{(n)} + AQx^{(n)} + a^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \tag{19}$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - (\varphi, AQx^{(n)}) + \alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + (\varphi, b). \tag{20}$$

Припускаємо, що $a^{(n)}, \alpha_0^{(n)}$, задовольняють рівність (12), яка в цьому випадку має вигляд

$$(\varphi, a^{(n)}) + \alpha_0^{(n)} = \lambda, \qquad n = 0, 1, \dots. \tag{21}$$

Означення множини ε_0 за формулою (9) можна записати у вигляді

$$\varepsilon_0 = \{\{x, y\} : (\varphi, x) + y = 0, x \in E, y \in E'\}.$$

Для алгоритму (19), (20) можна отримати

$$y^{(n+1)} - y^* = -\frac{(\varphi, AQ(x^{(n)} - x^*))}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}} + \frac{\alpha_0^{(n)}}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}}(y^{(n)} - y^*),$$

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x^* =& AP(x^{(n)} - x^*) + AQ(x^{(n)} - x^*) \\ &+ a^{(n)}\frac{(\varphi, AQ(x^{(n)} - x^*))}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}} + \frac{(1-\lambda)a^{(n)}}{1 + \lambda + \alpha_0^{(n)}}(y^{(n)} - y^*). \end{aligned} \tag{22}$$

Оскільки рівність (13) у цьому випадку має вигляд

$$\varphi(x^{(n)} - x^*) + (y^{(n)} - y^*) = 0,$$

то за довільного вибору $\psi^{(n)} \in E'$ цю рівність використаємо для того, щоб замість (22) отримати рівність

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x^* = A(x^{(n)} - x^*) &+ \frac{a^{(n)}}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}}(\varphi, AQ(x^{(n)} - x^*)) - \psi^{(n)}(\varphi, x^{(n)} - x^*) \\ &+ \left(\frac{(1-\lambda)a^{(n)}}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}} - a^{(n)}\psi^{(n)}\right)(y^{(n)} - y^*). \end{aligned} \tag{23}$$

Якщо конкретизувати вибір $\psi^{(n)}$ за формулою

$$\psi^{(n)} = \frac{(1-\lambda)}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}},$$

то з формули (23) випливає, що

$$x^{(n+1)} - x^* = A(x^{(n)} - x^*) - \frac{a^{(n)}}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}}(\varphi, (I - A)(x^{(n)} - x^*)).$$

Застосування теореми 1 засвідчує, що для збіжності послідовності $\{x^{(n)}\}$ до x^*, а також послідовності $\{y^{(n)}\}$ до y^* достатньо, щоб при $n = 0, 1, \dots$ оператор

$$H_1^{(n)}w = Aw - \frac{a^{(n)}}{1 - \lambda + \alpha_0^{(n)}}(\varphi, (I - A)w) \tag{24}$$

був оператором стиску. В тому окремому випадку, коли $\alpha_0^{(n)} = 0$, тобто, коли $(\varphi, a^{(n)}) = \lambda$, із (24) отримується

$$H_1^{(n)}w = H_2^{(n)}w = Aw - a^{(n)}(\varphi, w).$$

Отже, в цьому окремому випадку для збіжності послідовності $\{x^{(n)}\}$ до розв'язку рівняння (1) достатньо, як можна переконатися, щоб був стиском оператор $H_2^{(n)}$ і щоб початкове наближення $x = x^{(0)}$ задовольняло рівність

$$(\varphi, x) = \frac{(\varphi, b)}{1 - \lambda}.$$

Зазначимо, що у цьому випадку при виборі $a^{(n)}$ за формулою

$$a^{(n)} = \frac{APx^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}$$

алгоритм (19), (20) зводиться до проекційно-ітеративного алгоритму

$$x^{(n+1)} = APx^{(n)} + Qx^{(n)} + b.$$

Якщо $a^{(n)}$ означено за формулою (21) і при цьому $\alpha_0^{(n)} = 0$ при $n = 0, 1, \ldots$, то формули (19), (20) можна записати у вигляді однієї формули вигляду

$$x^{(n+1)} = AQx^{(n)} + \frac{(\varphi, b) + (\varphi, AQx^{(n)})}{(1-\lambda)(\varphi, x^{(n)})} APx^{(n)} + b. \tag{25}$$

Алгоритм (25) можна розглядати як узагальнення однопараметричного методу ітеративного агрегування із [3]. Алгоритм (25) тотожний із зазначеним алгоритмом з [3], що описується формулою (4) у випадку, коли P є тотожним оператором. Маємо на увазі при цьому, що

$$a^{(n)} = \frac{Ax^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}.$$

За цієї ситуації матимемо нестаціонарний аналог алгоритму (2) вигляду

$$x^{(n+1)} = AP_n x^{(n+1)} + AQ_n x^{(n)} + b. \tag{26}$$

В ньому проекційний оператор P_n залежить від номера ітерації n. Істотною відмінністю алгоритму (4) від алгоритму (26) є те, що проекційно-ітеративні методи вигляду (2) та (26), а також інші проекційно-ітеративні методи ґрунтуються на ідеї емпіричного вибору проекційного оператора P_0. Алгоритм (4) як і багатопараметричні методи ітеративного агрегування ґрунтуються на властивості алгоритмічного вибору підпростору E' і операторів проектування простору E в E' на кожному кроці ітераційного процесу.

References

[1] He G., Feng H., Li C., Chen H. *Parallel SimRank Computation on Large Graphs with Iterative Aggregation.* In: Proc. of the 16th ACM SIGKDD Intern. Conf. KDD, Washington DC, USA, July 25–28, 2010, ACM, New York, USA, 543-552. doi: 10.1145/1835804.1835874

[2] Hrobova T.A., Stetsenko V.Ya. Iterative aggregation methods for the approximate solution of linear and nonlinear algebraic systems and integral equation. Publ. House of the Stavropol State Univ., Stavropol, 2003. (in Russian)

[3] Krasnoselsky M.A., Lifshits E.A., Sobolev A.V. Positive linear system. Nauka, Moscow, 1985. (in Russian)

[4] Krasnoselsky M.A., Vaynikko G.M., Zabreyko P.P., Rutitsky Ya.B., Stetsenko V.Ya. The approximate solution of operator equation. Nauka, Moscow, 1969. (in Russian)

[5] Kurpel N.S. Projection-iterative methods for the solution of operator equations. Naukova Dumka, Kyiv, 1968. (in Russian)

[6] Luchka A.Yu. The theory and application of the mrthod averaging functional correction. Publ. House of USSR Acad. of Sci., Kyiv, 1963. (in Russian)

[7] Marek I., Mayer P., Pultarava I. *Convergence issues in the theory and practice of iterative aggregation/disaggregation methods.* Electronic Trans. on Numerical Analysis, 2009, **35**, 185–200.

[8] Shuvar B.A. *The convergence of multi-parametric variants of the iterative aggregation*. Bull. Lviv Politechnic Inst. Appl. Math. 1989, **232**, 140–142. (in Russian)

[9] Shuvar B.A., Kopach M.I., Mentynskyy S.M., Obshta A.F. Bilateral approximate methods. Publ. House of Precarpathian Univ., Ivano-Frankivsk, 2007. (in Ukrainian)

[10] Shuvar B.A., Obshta A.F., Kopach M.I. *Decomposition of linear operator equations by iterative aggregation methods.* Mathematical Bull. of Shevchenko Sci. Soc. 2012, **9**, 384–398. (in Ukrainian)

[11] Shuvar B.A., Petrovych R.Y. *Aggregation-iterative algorithm for linear equation in Banach spaces.* Dep. DNTB in Ukraine 1995, **2345** (95), 1–6. (in Ukrainian)

[12] Shuvar B.A., Petrovych R.Y. *Parametrization of a projection-iterative algorithm.* Dep. DNTB in Ukraine 1995, **2342** (95), 1–8. (in Ukrainian)

[13] Sokolov Yu.D The method of averaging functional corrections. Naukova Dumka, Kyiv, 1967. (in Russian)

[14] Zhu Y., Ye S., Li X. *Distributed PageRank computation based on iterative aggregation-disaggregation methods.* In: Proc. of the 14th ACM Intern. Conf. on Information and knowledge management, Bremen, Germany, October 31 – November 5, 2005, ACM, New York, USA, 578–585. doi: 10.1145/1099554.1099705

Надійшло 01.12.2012

Shuvar B.F., Obshta A.F., Kopach M.I. *Aggregation-iterative analogues and generalizations of projection-iterative methods*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 156–163.

Aggregation-iterative algorithms for linear operator equations are constructed and investigated. These algorithms cover methods of iterative aggregation and projection-iterative methods. In convergence conditions there is neither requirement for the corresponding operator of fixed sign no restriction to the spectral radius to be less than one.

Key words and phrases: projection-iterative methods, decomposition, aggregation-iterative methods.

Шувар Б.А., Обшта А.Ф., Копач М.И. *Агрегационно-итеративные аналоги и обобщения проекционно-итеративных методов* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 156–163.

Для линейных операторных уравнений построены и исследованы агрегационно-итеративные алогоритмы, которые охватывают способы итеративного агрегирования и проекционно-итеративные методы. В условиях сходимости отсутствует требование о знакопостоянности соответствующего оператора и ограничение, чтобы его спектральный радиус был меньше единицы.

Ключевые слова и фразы: проекционно-итеративные методы, декомпозиция, агрегационно-итеративные методы.

ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №1 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.1

ГРИГОРЧУКУ РОСТИСЛАВУ ІВАНОВИЧУ — 60 РОКІВ

23 лютого 2013 року виповнилося 60 років видатному українському математику Ростиславу Івановичу Григорчуку.

Ростислав Іванович народився в селі Вишнівці, неподалік замку князя Вишневецького, що на Тернопільщині. Батько Ростислава, Іван Федорович, кандидат фізико-математичних наук, у 1966 – 1999 роках працював доцентом кафедри математичного аналізу Чернівецького університету, мати — лікар-терапевт.

У 1970 – 1975 роках Ростислав Григорчук навчався на механіко-математичному факультеті Московського державного університету. Не останню роль при вступі до університету відіграла рекомендація академіка Колмогорова. У 1978 році в Московському державному університеті ім. Ломоносова Ростислав Іванович під керівництвом А.М. Стьопіна захистив кандидатську дисертацію на тему "Банахові середні в однорідних просторах і випадкові блукання". Через сім років у Математичному інституті Російської академії наук Р.І. Григорчук захистив докторську дисертацію на тему "Функції зростання скінченно-породжених груп та їх застосування".

З 1978 р. Р.І. Григорчук працював у Московському державному університеті шляхів сполучення. З 1992 до 1995 року завідував кафедрою вищої математики, на якій працював один з провідних спеціалістів в області диференціальних рівнянь з післядією професор Анатолій Дмитрович Мишкіс.

У 1995 році Ростислав Іванович став провідним науковим співробітником Інституту математики ім. В.А. Стєклова, а з 2000 до 2002 року разом з академіками Д.В. Аносовим та А.А. Болібрухом брав участь у створенні кафедри "Динамічні системи".

З 2002 року до даного часу Ростислав Григорчук — професор математики в Техаському A&M університеті (у дослідженнях банахових просторів, операторних алгебр та деяких інших напрямках математики цей університет займає одне з перших місць у США). У 2008 році йому присвоєний ранг заслуженого професора цього університету (Distinguished Professor of Texas A&M University).

Вже у своїх ранніх роботах він запропонував елегантні розв'язки декількох визначних проблем, які залишалися відкритими впродовж десятиліть і були сформульовані найвидатнішими математиками того часу. У 1980 році Ростислав Григорчук побудував простий приклад скінченно-породженої нескінченної періодичної групи, як групи породженої перетвореннями одиничного відрізка, що зберігають міру. У 1984 році він показав, що ріст цієї групи проміжний між поліноміальним і експоненційним. Це перший приклад такої групи, що дало відповідь на давнє питання одного з найвидатніших топологів 20 століття Мілнора (J. Milnor) про існування таких груп.

Це відкриття стало справжнім проривом у теорії ростів груп. З того часу було побудовано багато інших прикладів груп із різними типами ростів, але всі вони базуються на прикладі Р.І.Григорчука. Ця група володіє багатьма іншими цікавими властивостями. Наприклад, вона є першим прикладом аменабельної, але не елементарно аменабельної групи. Із вивчення властивостей цієї та подібних груп виросли нові розділи теорії груп: гіллясті групи, самоподібні групи, групи породжені автоматами та ін. Ці розділи знайшли своє застосування у багатьох інших галузях математики: голоморфній динаміці, ергодичній теорії, спектральній теорії, теорії l_2-інваріантів, теорії випадкових блукань, фрактальному аналізі тощо.

Після такого блискучого вступу до світу математики Ростислав Григорчук не перестає вражати колег своїми глибокими дослідженнями у різних галузях. Серед інших видатних досягнень ювіляра слід виділити: розв'язання проблеми М.Дея (M.Day) про неелементарні аменабельні групи, проблеми Зельманова (Zelmanov) (спільно із L. Bartholdi) про групи скінченної ширини, проблеми Ат'і (M. Atiyah) (спільно із P. Linnell, T.Schick, A.Zuk) про l^2-числа Бетті. Зроблено значний вклад до загальної проблеми Бернсайда, створено теорію гіллястих груп (груп Григорчука).

Наукові інтереси Ростислава Івановича стосуються таких галузей математики як: теорія груп, теорія динамічних систем, маловимірна топологія, теорія автоматів, статистична фізика, теорія когомології, фрактальна геометрія, теорія формальних мов, теорія випадкових блукань. У всіх цих галузях математики він дав плідні і глибокі ідеї, які на довгі роки визначили ефективні напрямки їх розвитку.

Ростислав Григорчук є членом Американського, Лондонського та Московського математичних товариств, редактором журналу "Groups, Geometry and Dynamics", членом редколегій журналів "International Journal of Algebra and Computation", "Journal of Modern Dynamics", "Geometriae Dedicata", "Algebra and Discrete Mathematics", "Математичні студії" та "Карпатські математичні публікації".

Наукове Товариство ім. Шевченка в Америці та фундація "Україна-США" при сприянні першого посла США в Україні дост. Романа Попадюка і Українського та Київського математичних товариств у 2008 р. оголосили конкурс для молодих математиків в Україні. Професор Ростислав Григорчук — голова комітету цього конкурсу.

Широта та різносторонність інтересів, потужний творчий компонент, вміння зацікавити, чудовий лекторський талант — все це допомогло згуртувати навколо Ростислава Григорчука ряд обдарованих учнів з різних країн світу, в першу чергу з України, Росії, Швейцарії, Італії, Ірану, США тощо.

В даний час Ростислав Іванович знаходиться у розквіті своїх творчих сил і продовжує проводити плідну науково-дослідницьку роботу. Тож побажаємо йому доброго здоров'я, довгих років життя та подальших творчих успіхів.

Артемович О.Д., Банах Т.О., Бондаренко В.М, Боднарчук Ю.В., Гаврилків В.М., Ганюшкін О.Г., Гуран І.Й., Дрозд Ю.А., Загороднюк А.В., Зарічний М.М., Заторський Р.А., Кириченко В.В., Кирчей І.І., Маслюченко В.К., Микитюк І.В., Некрашевич В.В., Никифорчин О.Р., Петравчук А.П., Петричкович В.М., Пилипів В.М., Сущанський В.І., Філевич П.В., Черевко І.М., Шарин С.В., Шарко В.В.

Науковий журнал

Карпатські Математичні Публікації

(свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 14703-3674Р)

Том 5, №1
2013

Відповідальний за випуск д.ф.-м.н. Загороднюк А.В.
Літературна редакція Дубей М.В.
Комп'ютерна правка та макетування Кравців В.В.

Підписано до друку 4.06.2013 р. Формат 60×84/8.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Computer Modern
Умовн. друк. аркушів 19,30. Наклад 300 примірників. Замовлення 37

Друк: пп Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. 0342 58 04 32